Une approche de la complexité en classe : les triplets pythagoriciens

Académie de Lyon – Décembre 2013

Un exemple en classe de seconde

Triplets pythagoriciens de somme donnée.

On appelle triangle entier un triangle dont les côtés sont de longueur entière.

Un exemple en classe de seconde

Avec la fonction suivante, on cherche à déterminer les triangles rectangles entiers de périmètre p.

```
def triangle_rect_de_perim(p):
    L=[]
    for a in range(1,p+1):
        for b in range(1,p+1):
            for c in range(1,p+1):
                if a+b+c==p and a**2+b**2==c**2:
                    L.append((a,b,c))
    return L
```

Si on trace la courbe d'une fonction qui à p associe le temps d'exécution, à quoi peut-on s'attendre ?

Triplets pythagoriciens de somme donnée

Obtenir les solutions avec un algorithme en temps quadratique.

Triplets pythagoriciens de somme donnée

Obtenir les solutions avec un algorithme en temps quadratique.

```
def trp(p):
    L=[]
    for a in range(1,p+1):
        for b in range(1,p+1):
            c=p-a-b
            if a**2+b**2==c**2:
                    L.append((a,b,c))
    return L
```

Temps second degré

Un exercice de comparaison

On propose ci-dessous deux fonctions python.

1. Expliquer pourquoi elles conviennent également pour la résolution du problème de la recherche des triangles rectangles entiers de périmètre p.
2. Quelle est la meilleure des deux ?

Les deux programmes

Un exercice de comparaison

```
def trp1(p):
    L=[]
    for a in range(1,p/3+1):
        for b in range(a,p/2+1):
            c=p-a-b
            if a**2+b**2==c**2:L.append((a,b,c))
    return L
```

```
def trp2(p):
    L=[]
    for a in range(1,p/3+1):
        for b in range(a,p-a):
            c=p-a-b
            if a**2+b**2==c**2:L.append((a,b,c))
    return L
```

Triplets pythagoriciens de somme donnée

1. Pour $1 \leqslant a \leqslant \frac{p}{3}$ et $a \leqslant b \leqslant \frac{p}{2}$, on a $p - a - b > 0$. De même pour $1 \leqslant a \leqslant \frac{p}{3}$ et $a \leqslant b \leqslant p - a$.
   Les deux fonctions sortiront donc des triplets (a, b, c) avec $1 \leqslant a \leqslant b < c$ et $a + b + c = p$, $a^2 + b^2 = c^2$.
2. Pour tpr1.
   Soit a tel que $a > \frac{p}{3}$ avec $a \leqslant b < c$ alors $a + b + c > p$: il n'existe pas de solution avec $a > \frac{p}{3}$ ou avec $b > \frac{p}{2}$.
   De même : pas de triplet $(a; b; c)$ avec $a \leqslant b < c$ et $b > \frac{p}{2}$.
   idem pour tpr2.
3. La boucle en b s'arrêtant à $\frac{p}{2}$ est meilleure puisque pour $a \leqslant \frac{p}{3}$, on a $p - a \geqslant p - \frac{p}{3} > \frac{p}{2}$.