

# Une approche de la complexité en classe : deux suites pourtant identiques

Académie de Lyon – Décembre 2013

## « Fibonacci à un rang »

### En première ou en terminale.

On programme une suite  $u$  et une suite  $v$  de la façon suivante :

```
def u(n):  
    if n==0 : return 1  
    else : return u(n-1)+u(n-1)  
  
def v(n):  
    if n==0 : return 1  
    else : return 2*v(n-1)
```

Calculs des premiers termes

# Questions

- 1 Comparer les sorties des deux programmes.
- 2 Ces deux programmes sont-ils « équivalents » ?

# Temps de calcul expérimental

Lancer les calculs de  $u(26)$  et  $v(26)$ .

Calculs de  $u(26)$  et  $v(26)$

Le couple (entrée , sortie) semble-t-il suffisant pour déclarer des programmes « équivalents » ?

# Ces deux programmes sont-ils « équivalents » ?

Mesures expérimentales des temps de calcul.

Courbes des temps de calcul

Explication pour les courbes observées ?

# Un exercice classique sur les suites : explication des temps de calcul

Notons  $s(n)$  le nombre d'opérations utilisées pour le calcul de  $v(n)$ .

```
def v(n):  
    if n==0 : return 1  
    else : return 2*v(n-1)
```

Expression de  $s(n)$  en fonction de  $n$  ?

# Un exercice classique sur les suites

$s(n)$  le nombre d'opérations utilisées pour le calcul de  $v(n)$ .

```
def v(n):  
    if n==0 : return 1  
    else : return 2*v(n-1)
```

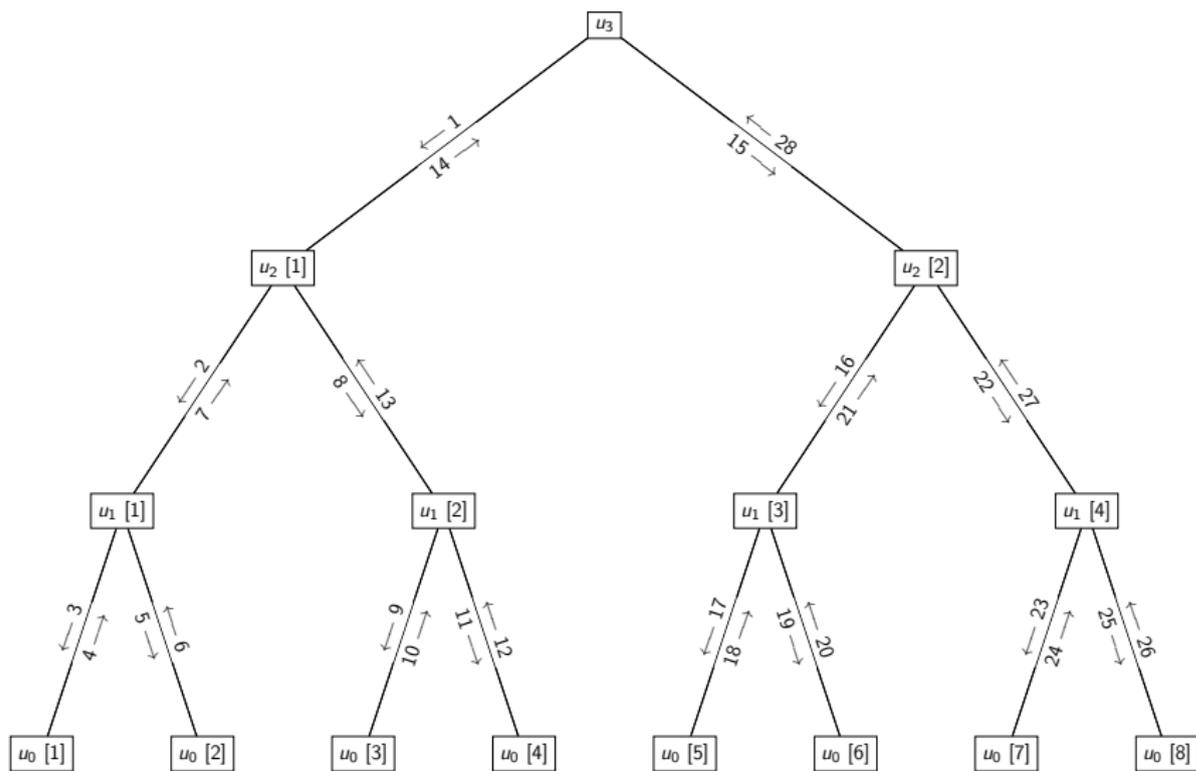
$s(0) = 0$  et  $s(n) = 1 + s(n - 1)$ . D'où  $s(n) = n$ .

# Un exercice classique sur les suites

Notons  $t(n)$  le nombre d'opérations utilisées pour le calcul de  $u(n)$ .

```
def u(n):  
    if n==0 : return 1  
    return u(n-1)+u(n-1)
```

Expression de  $t(n)$  en fonction de  $n$ ?



# Un exercice classique sur les suites

$t(n)$  le nombre d'opérations utilisées pour le calcul de  $u(n)$ .

```
def u(n):  
    if n==0 : return 1  
    return u(n-1)+u(n-1)
```

$t(0) = 0$  et  $t(n) = 1 + t(n-1) + t(n-1)$ .

Suite arithmético-géométrique.

$t(n) = 2^n - 1$ .

## Questions complémentaires

Un test sur ma machine montre que  $u(22)$  est calculé en environ 1,26 s.

- 1 En déduire une estimation du temps nécessaire au calcul de  $u(27)$ .  
Puis vérifier expérimentalement.
- 2 Estimer alors le temps nécessaire au calcul de  $u(50)$ . ... Puis lancer le calcul de  $v(50)$

## Questions complémentaires : réponses

- ① Si l'on estime que le temps d'exécution est essentiellement dû aux opérations élémentaires (ici des additions) et qu'une addition prend un temps constant  $a$ , alors le calcul de  $u(22)$  nécessite un temps égal d'environ  $t_{22} = 2^{22}a$  et le calcul de  $u(27)$  demande un temps de calcul d'environ  $2^{27}a = 2^5 \times t_{22} \approx 40$  s. Confirmation expérimentale

## Questions complémentaires : réponses

- 1 Si l'on estime que le temps d'exécution est essentiellement dû aux opérations élémentaires (ici des additions) et qu'une addition prend un temps constant  $a$ , alors le calcul de  $u(22)$  nécessite un temps égal d'environ  $t_{22} = 2^{22}a$  et le calcul de  $u(27)$  demande un temps de calcul d'environ  $2^{27}a = 2^5 \times t_{22} \approx 40$  s. Confirmation expérimentale
- 2 Pour  $u(50)$  :  $1,26 \times 2^{50-22}$  secondes, soit plus de 10 ans.

## Questions complémentaires : réponses

- 1 Si l'on estime que le temps d'exécution est essentiellement dû aux opérations élémentaires (ici des additions) et qu'une addition prend un temps constant  $a$ , alors le calcul de  $u(22)$  nécessite un temps égal d'environ  $t_{22} = 2^{22}a$  et le calcul de  $u(27)$  demande un temps de calcul d'environ  $2^{27}a = 2^5 \times t_{22} \approx 40$  s. Confirmation expérimentale
- 2 Pour  $u(50)$  :  $1,26 \times 2^{50-22}$  secondes, soit plus de 10 ans.
- 3 Le calcul de  $v(50)$  est lui quasi immédiat.

# Un classique revisité

- 1 On plie en deux une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm puis on recommence et on recommence. . . Duschmoll annonce qu'il est parvenu à la plier 30 fois sur elle-même. . .
- 2 Après avoir constaté un temps de calcul de 1,26 s pour le calcul de  $u(22)$ , Duschmoll annonce que son programme lui donne aussi  $u(50) = 1\,125\,899\,906\,842\,624 \dots$