Cinq outils pour l'appropriation des contenus et savoir-faire en mathématiques

par Jean-Alain Roddier
IA-IPR de mathématiques
Académie de Clermont-Ferrand

Cet article a été écrit dans le cadre de la préparation d'un atelier présenté lors du séminaire inter-académique des IA-IPR de mathématiques des 10 et 11 décembre 2013. Il a pour objet de présenter cinq outils propres à placer l'appropriation des contenus et savoir-faire au centre de l'enseignement des mathématiques.

En préambule de cet article, nous souhaitons préciser que les textes institutionnels donnent des invites précises à mettre en œuvre des processus d'appropriation et que ces textes officiels seront au cœur de notre réflexion.

En ce qui concerne l'atelier proprement dit, la problématique reprend ce que nous venons d'exprimer, elle est posée avec la question suivante : *Comment influer sur les pratiques pédagogiques afin de mettre l'appropriation des contenus et savoir-faire au centre de l'enseignement des mathématiques?*
Une fois cette problématique posée, la présentation réalisée dans la première partie de l'atelier porte sur cinq outils :

- **La phase « primaire » d'appropriation** à mettre en place qu'il suggère de mettre en place au tout début de la démarche d'investigation ;
- **Une phase d'appropriation de la correction d'un problème** dans laquelle on propose au professeur de consacrer en toute fin de correction d'un problème un temps uniquement réservé à sa lecture-explicitation afin que l'appropriation de la correction se fasse pendant le temps scolaire ;
- **L'appropriation des formules** avec une séquence découpée en trois phases : mise en avant de la syntaxe, un travail sur la sémantique des formules suivie d'une dernière phase sur les changements de registre sémiotique ;
- **La place de l'exemple par rapport au formalisme** avec une réflexion autour de l'exemple générique et de son rôle facilitateur d'appréhension du caractère abstrait des objets mathématiques ;
- **La place du support visuel** dans les processus d'appropriation et le principe d'avoir des présentations au tableau qui sont pensées en amont de la séance.

I) Premier outil : la phase primaire d'appropriation.

Nous partons du constat suivant à savoir que dans la recherche de problème, l'élève est souvent placé directement en situation de recherche ; ainsi une fois l'énoncé donné, la

phase de recherche intervient sans transition. Ceci a pour conséquence que la recherche de problème est davantage une mise en condition de l'élève qu'une action de formation.
La lecture du programme de collège fournit dans l'introduction commune une description complète de la démarche d'investigation. Ce texte propose en particulier la mise en place d'un canevas développé au cours de sept moments clairement identifiés dont l'un d'entre eux porte sur l'appropriation du problème par les élèves.
Les préambules des programmes de Physique-chimie, de SVT et de mathématiques des classes de seconde permettent au professeur d'avoir une idée précise de ce que l'on entend par le groupe nominal « démarche scientifique » avec en termes méthodologiques la mise en place de phases structurant l'activité de recherche en consacrant à chaque phase des durées modulables en fonction du déroulement du traitement du problème.
D'une façon générale, on peut s'attacher à la mise en place des 4 phases suivantes :

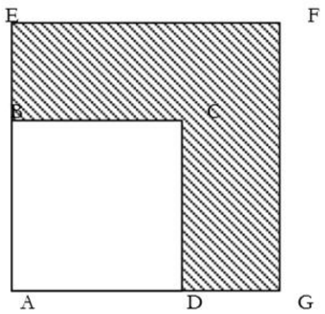
- La phase d'appropriation
- La phase de recherche
- La phase de restitution
- La phase de capitalisation.

En mathématiques, afin d'installer une phase d'appropriation comme premier temps de traitement d'un problème, nous pourrions préconiser la mise en place de ce que nous appellerons une phase primaire d'appropriation correspondant à un temps réservé uniquement à la lecture simple et à l'explicitation de l'énoncé. Nous parlons ici de phase primaire d'appropriation pour particulariser ce temps avec toutes les actions d'appropriation qui peuvent suivre parmi lesquelles la manipulation des outils est une source incontournable d'appropriation.
Afin d'illustrer ce concept de phase primaire d'appropriation, prenons l'exemple du traitement d'un problème extrait de la banque de problèmes pour le collège disponible sur le site Éduscol avec le problème ci-dessous du niveau fin de 4ème :

Sur la figure ci-contre :

- AEFG est un carré de côté 17 cm,
- ABCD est un carré,
- B est un point mobile du segment [AE] et D est un point mobile du segment [AG] tels que ABCD reste un carré.

À quelle distance du point A doit-on placer le point B pour que la surface hachurée ait une aire de 189 cm^2 ?



La phase primaire d'appropriation consistera avant tout à ce que l'énoncé soit projeté au tableau et à ce que le professeur développe :

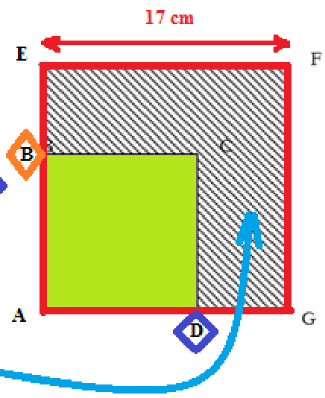
- dans un premier temps, une lecture simple de l'énoncé avec différents scénarii de lecture. Il peut s'agir d'une lecture réalisée d'abord par ses soins suivie d'une lecture demandée phrases par phrases à des élèves. L'idée de cette première lecture est de mettre en exergue les différentes composantes de l'énoncé avec un corps de phrases suivi d'une consigne et d'une figure que l'on s'attachera elle-aussi à décrire ;
- dans un second temps, une explicitation de l'énoncé qui consiste à amener tous les élèves à progresser dans l'appréhension de l'énoncé avec l'installation d'un

dialogue construit avec des questions préparées si possible par le professeur en amont de la séance. On veille à mettre en avant une composante visuelle dans le traitement de l'énoncé montrant un travail factuel mettant en relief ses différentes composantes avec des jeux de couleurs, de flèches et d'encadrés utilisés de façon systématique et conduisant à obtenir au tableau un énoncé ayant subi un véritable traitement à l'identique de notre exemple représenté ci-contre. Il s'agit bien d'expliciter « concrètement » l'énoncé.

Sur la figure ci-contre :

- AEFG est un carré de côté 17 cm,
- ABCD est un carré,
- B est un point mobile du segment [AE] et D est un point mobile du segment [AG] tels que ABCD reste un carré.

À quelle distance du point A doit-on placer le point B pour que la surface hachurée ait une aire de 189 cm^2 ?



C'est uniquement une fois que cette phase primaire d'appropriation est réalisée que le professeur amène ses élèves à passer à une recherche individuelle.
Nous avons ainsi un processus de formation à la recherche de problème où les codes de traitement de l'énoncé sont transmis à tous les élèves. Cela n'empêche en rien de proposer ensuite la mise en œuvre par l'élève de cette phase de lecture et d'explicitation dans la recherche d'un problème en complète autonomie.

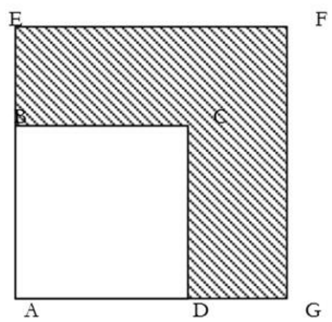
II) L'appropriation de la correction d'un problème

Nous partons à nouveau d'un constat : La correction du problème est la plupart donnée en fin d'heure avec comme consigne tacite une appropriation de cette correction à réaliser à la maison. La question est de savoir comment prévoir tout au long de la « co-construction » de cette correction des temps centrés sur son appropriation pendant le temps de classe.
Pour ce faire, une préconisation peut consister à centrer l'action du professeur autour des explications qu'il va être amené à produire. Dans ce cadre, il serait utile de réfléchir à la préparation en amont des explications et d'un plan pour fournir ces explications aux élèves.
En résumé, on peut prévoir que ce temps de correction soit propice au développement d'explications pré-pensées.
Afin d'illustrer cette structuration des explications, nous reprenons le même exemple extrait de la banque de problèmes pour le collège.

Sur la figure ci-contre :

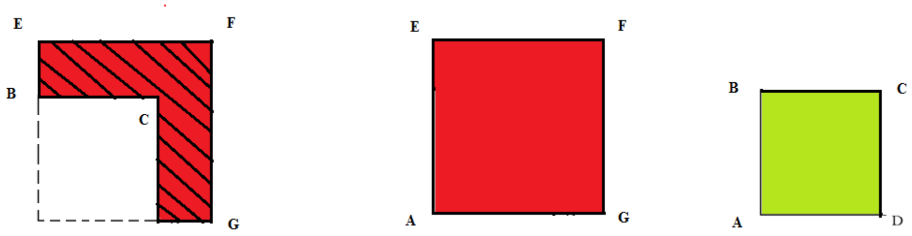
- AEFG est un carré de côté 17 cm,
- ABCD est un carré,
- B est un point mobile du segment [AE] et D est un point mobile du segment [AG] tels que ABCD reste un carré.

À quelle distance du point A doit-on placer le point B pour que la surface hachurée ait une aire de 189 cm^2 ?



Le professeur peut prévoir de structurer ses explications en suivant des temps précis :

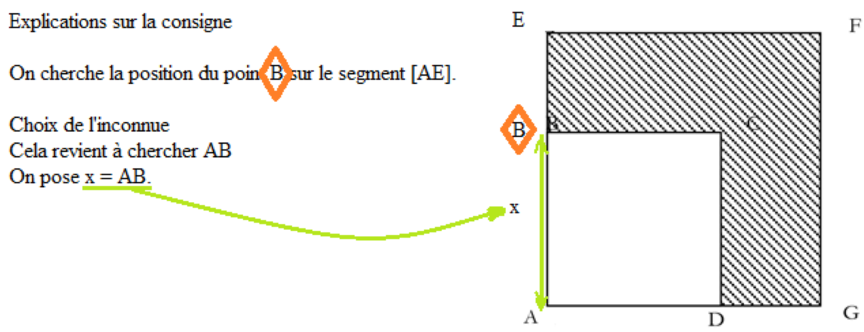
- **Le temps d'explicitation de la consigne :** on veille à choisir si possible un seul cadre dans lequel on va développer les explications. S'agissant de notre exemple, la consigne est explicitée dans le cadre géométrique. On veillera ici à ce que des éléments visuels soient portés sur la phrase « centrale » de l'énoncé afin que ces éléments mettent en relation le texte et la figure.



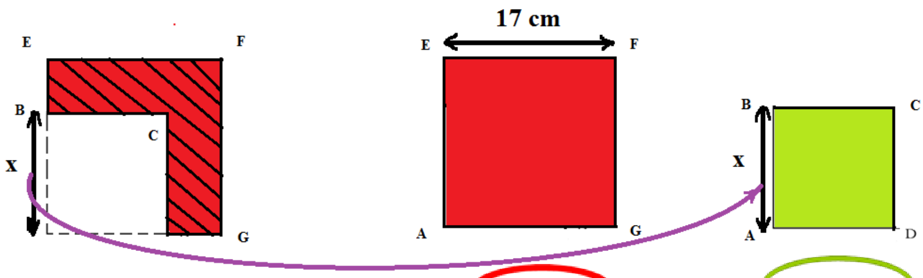
La partie hachurée est obtenue en prenant le grand carré et en enlevant le petit carré.

- **Le temps d'explicitation de la démarche** : celle-ci est trop souvent donnée de façon tacite et il peut être utile de la faire figurer de façon décortiquer et de montrer sa correspondance par rapport à la consigne.

  Dans notre exemple, l'explication de la consigne conduit à la transposition de la question posée vers la recherche d'une inconnue.

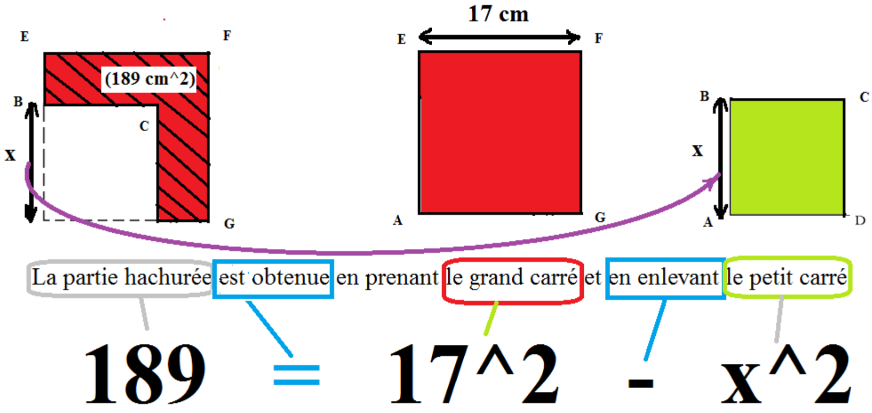


- **Le temps d'accompagnement des changements de cadre** : il convient de mettre progressivement des liens propices à expliciter les changements de cadre. Dans notre exemple, une première étape d'explications consistera à mettre en avant ce que désigne la lettre « x » sur toutes les figures présentées au tableau.



La partie hachurée est obtenue en prenant le grand carré et en enlevant le petit carré.

Une deuxième étape consiste alors à mettre en place un changement de cadre et à en décortiquer toutes les composantes. S'agissant ici de trois figures géométriques, on veille à expliquer comment l'on obtient ou l'on exprime les aires de chacune des surfaces considérées.



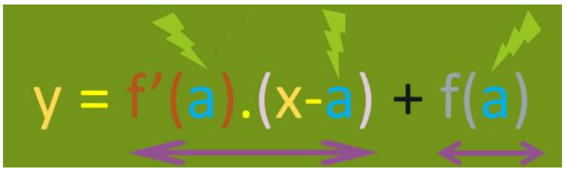
Nous pouvons préconiser qu'une phase primaire d'appropriation soit conduite sur la correction, c'est-à-dire de faire en sorte que cette correction soit lue et explicitée une fois qu'elle est entièrement écrite au tableau.

III) L'appropriation des formules

La présentation d'une formule dans le cours de mathématiques se fait la plupart du temps avec un retour en préambule sur les contraintes restrictives de son application, l'usage veut que le maximum de précautions soient prises dans les énoncés. Cela conduit à avoir des capitalisations où la formule qui doit s'inscrire dans la mémoire à long terme a beaucoup de mal à s'extraire du corps du texte. Afin de remédier à cela, nous préconisons que la formule soit recentrée sur le tableau au sens premier du terme, c'est-à-dire que le tableau est effacé puis que la formule soit recopiée au centre du tableau. Nous pouvons alors mettre en place un processus d'analyse de la formule développée en trois temps. Afin d'illustrer cette notion, nous prenons l'exemple de la formule qui donne l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a.

1) **Premier temps : on montre la structure syntaxique de la formule**.

On s'attache dans cette partie à décrire uniquement les symboles utilisés dans la formule. Sur notre exemple, on fait apparaître la formule et on la colorie, en précisant les points suivants :



Dans le membre de droite, il y a deux blocs.

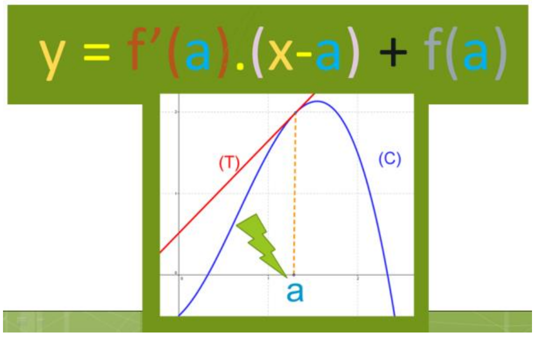
Les lettres « x » et « y » interviennent une seule fois. Il en va de même de f et de **f '**.

En revanche, la lettre « **a** » intervient trois fois.

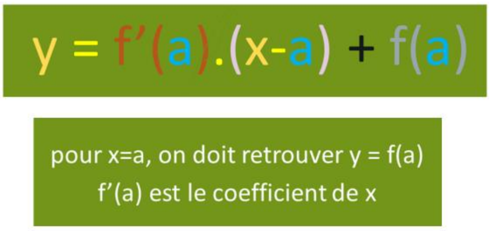
2) **Deuxième temps : on montre la structure sémantique des formules.**

Cette fois-ci, on décrit la formule en donnant le signifié de chaque composante. Il s'agit tout d'abord d'évoquer le côté « normal » de la présence de x et y qui interviennent une seule fois au regard de la structure de l'équation réduite d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées. On insiste ensuite sur la nature des deux fonctions qui interviennent dans la formule, l'une est la fonction « étudiée », l'autre est sa dérivée.

L'idée est ensuite d'insister sur la signification de la lettre « a » en donnant une image spécialement construite qui donne du sens à cette lettre. Une diapositive peut alors être présentée aux élèves à l'image de celle figurant ci-contre. Dans cette image, on identifie le pont entre la lettre « a » dans la figure et sa signification concrète en tant qu'abscisse du point en lequel on considère la tangente.



On installe ensuite des procédures tacites de contrôle qui permettront à l'élève de s'assurer que la formule qu'il a retenue est exacte. Cela permet - qui plus est – de donner du sens aux différentes composantes de la formule.

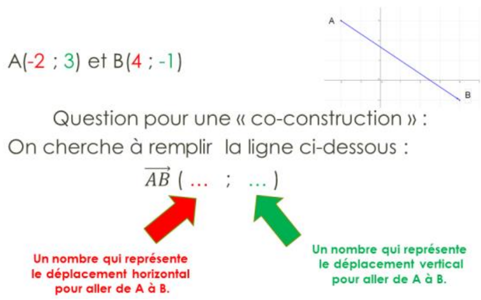


3) **Troisième temps : l'accompagnement des changements de registres sémiotiques.**
Cette partie est la suite naturelle de la partie précédente, on va conduire les élèves à montrer la correspondance étroite qu'il y a entre la formule et la phrase dans le sens où elles permettent toutes les deux de définir l'objet « tangente ». Autrement dit, il s'agit de montrer que dans la lecture algébrique de l'équation, on arrive à lire la définition de la tangente et vice-versa.
On sent parfaitement ici que ces temps d'appropriation de la formule permettent de lui donner du sens et ainsi de favoriser non seulement sa mémorisation à long terme mais son application directe par identification du rôle joué par chacune de ses composantes.

IV) Quatrième outil : l'exemple générique

L'exemple vient souvent en qualité d'illustration d'une notion, il est placé la plupart du temps après la formalisation qui crée un frein à l'appropriation de la notion. S'il s'agit d'introduire par exemple la notion de fonction polynôme du second degré à partir de la définition avec trois réels a, b et c avec a non nul, cela créé une situation didactique bloquante pour certains élèves. Au contraire, le fait de partir de deux ou trois exemples en identifiant la variable et les constantes conduit à ce que les élèves puissent accéder plus facilement à la définition formalisée.

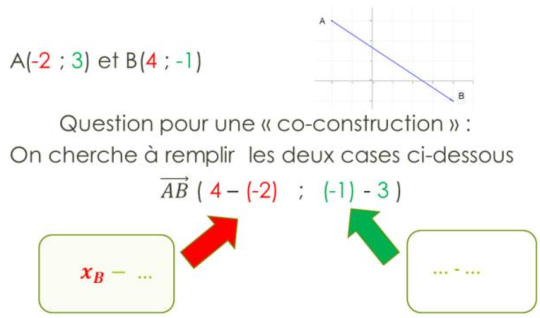
Parmi ces exemples, l'un va être privilégié en tant qu'exemple générique parce qu'il décrit « bien » ce que l'on attend généralement du traitement que l'on va avoir à réaliser dans toutes les cas de figures. Un exemple générique est un exemple qui peut éventuellement se substituer au formalisme (ou l'introduire), il a pour rôle de



lever les difficultés d'appréhension du caractère abstrait des objets mathématiques. Afin d'illustrer cette notion d'exemple générique, nous décrivons ici un exemple générique pour présenter la formule d'obtention des coordonnées d'un vecteur.

L'exemple générique permet ici de donner du sens à l'enjeu de la question en partant d'une situation concrète qui va être traitée en « co-construction ». Cet exemple a été choisi avec pertinence, il s'agit d'avoir une situation où la première coordonnée à chercher est positive et la seconde est négative. On centre la première partie de cet exemple sur le sens de ce que l'on appelle les coordonnées d'un vecteur.

La deuxième partie de l'exemple consiste à faire émerger progressivement la formule sous-jacente à chacune des coordonnées du vecteur. Une amorce est donnée aux élèves sur le calcul de la première coordonnée afin qu'ils appréhendent la question posée.



La question de savoir dans quelle mesure l'exemple peut éventuellement se substituer complétement au formalisme est une question que nous n'allons pas traiter dans cet article. On pourrait penser que si l'exemple générique suffit à ce que l'élève soit compétent dans le champ d'application d'une formule, il est possible de se passer de la mémorisation de la formule proprement dite, mais étant donné que les connaissances mathématiques s'empilent et s'enchevêtrent, il convient d'être prudent sur le degré d'exigence que l'on peut avoir quant à la connaissance de telle ou telle formule.

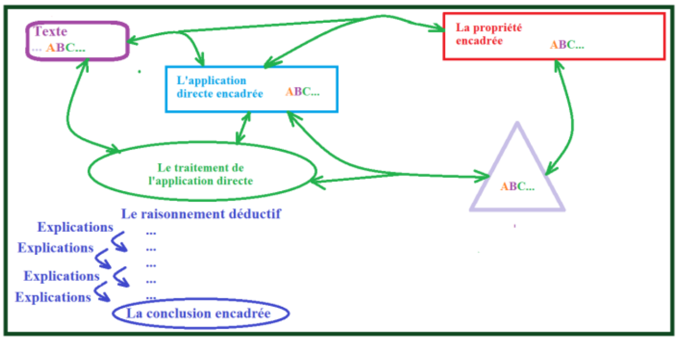
V) Cinquième outil : le support visuel des explications.

Le contenu du tableau est souvent improvisé ou dicté par ce qui se passe pendant la séance. Une présentation ainsi spontanée du tableau émanant d'une « co-construction » avec les élèves peut être propice à ce que les élèves reconnaissent ce qui est écrit au tableau. En revanche, cela conduit souvent à ce que les explications portent sur des zones excentrées du tableau ce qui nuit à la perception visuel des éléments sur lesquels portent les explications.

Nous pourrions préconiser que le contenu du tableau soit plus souvent pré-pensé en amont de la séance et que la mise en forme des éléments portés au tableau émane d'une réflexion conduite dans le cadre de la préparation de la séance.

En ce qui concerne les explications données en cours, il est utile que celles-ci portent sur des éléments concrets dont l'appréhension par les élèves est facilitée lorsque le professeur arrive à montrer ce qui est marqué au tableau en posant le doigt sur le tableau. En ce sens, nous pouvons dire que « le tableau est un tableau » et qu'à l'image de l'artiste peintre va imaginer son œuvre avant de la créer, le professeur de mathématiques peut conduire une réflexion visant à prévoir ce que sera son tableau.

Nous vous proposons ici un mode de présentation type pouvant servir de trame générale à la correction d'un exercice :



- On part en haut à droite de la propriété utilisée qui est encadrée. Un jeu de couleurs permet d'identifier les composantes que l'on va être amené à remplacer : s'il s'agit de trois points ou de quatre nombres, ils apparaitront ainsi de couleurs différentes. On veille aussi à souligner d'une couleur particulière les conditions d'application de la propriété.
- On met en relation les éléments de la propriété avec ceux de l'énoncé aussi bien dans le texte que dans la figure ou le graphique. Le jeu de couleurs permet de mettre en avant cette correspondance. On arrive ainsi à l'application directe qui est encadrée. C'est donc jusqu'ici 4 éléments que l'on place en étroite relation visuelle : la propriété du cours, le texte, la figure ou le graphique, et l'application directe.
- On passe ensuite au traitement de l'application directe dans lequel il s'agit la plupart du temps d'identifier dans l'énoncé ce qui est connu et ce que l'on cherche. On pourra pour réaliser cette mise en relation utiliser des flèches.
- Le raisonnement déductif peut être expliqué étape par étape. Il ne faut peut-être pas généraliser ce genre de développement d'explications sur le raisonnement déductif mais privilégier lors d'une séance d'exercices que l'une des corrections soit ainsi complétement développée.
- La conclusion doit être encadrée. On peut insister sur le fait qu'une fois le résultat encadré, il est nécessaire de réfléchir à sa cohérence avec la situation étudiée.

Conclusion

Les cinq outils que nous venons de présenter sont proposés à titre d'exemples. Il ne s'agit pas de laisser penser que l'on délivre aux travers de ces outils la pierre philosophale de la pédagogie des mathématiques mais plutôt de mettre en débat ces outils et d'en recueillir d'autres. Au niveau des préconisations donnés dans cet article, il serait qu'elles émanent d'études expérimentale, le fait que ces méthodes pratiques d'appropriation aient pu fonctionner dans des champs restreints ne permet en effet pas d'avancer qu'elles soient généralisables.