

I) Diviseurs et multiples

DEFINITION

Pour deux nombres entiers n et d non nuls,
 n est divisible par d
 n est un multiple de d
 d est un diviseur de n
 d divise n

} signifient { Il existe un nombre entier q tel que $n = d \times q$

EXEMPLES :

7 est un diviseur de 91 car $91 = 7 \times 13$. Pour la même raison, 13 est aussi un diviseur de 91.

THEOREME :

1 est diviseur de tout nombre entier a

PREUVE : Quel que soit le nombre a , on peut écrire $a = 1 \times a$ donc 1 est un diviseur de a .

THEOREME :

La somme de deux multiples d'un nombre entier est un multiple de ce nombre.

PREUVE :

Soit n un nombre entier. Deux multiples de n peuvent s'écrire $a \times n$ et $b \times n$ où a et b sont des nombres entiers. Or, $a \times n + b \times n = (a + b) \times n$ qui est aussi un multiple de n puisque $(a + b)$ est un nombre entier.

DEFINITION

Un **nombre premier** est un nombre qui a exactement deux diviseurs (1 et lui-même).

EXEMPLES :

6 n'est pas un nombre premier car ses diviseurs sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

7 est un nombre premier car les diviseurs de 7 sont 1 et 7.

1 n'est pas un nombre premier car il n'est divisible que par 1. Il n'a donc qu'un seul diviseur.

II) Diviseurs et multiples

DEFINITION

Un **diviseur commun** à deux ou plusieurs nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

EXEMPLES :

2 est un diviseur commun à 6 et à 10 car 2 divise 6 et 2 divise 10.

Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 et les diviseurs de 18 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 et 18

Donc les diviseurs communs à 12 et à 18 sont 1 ; 2 ; 3 et 6.

DEFINITION

Le **Plus Grand Diviseur Commun** à plusieurs nombres est appelé **PGCD** de ces nombres.

EXEMPLE :

Trouver le PGCD de 12 et 18 :

6 est le plus grand des diviseurs communs de 12 et 18 donc 6 est le PGCD de 12 et 18.

On note : **PGCD(12 ; 18) = 6**

III) Nombres premiers entre eux**DEFINITION**

Dire que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** signifie que leur PGCD est égal à 1.
Leur seul diviseur commun est 1.

EXEMPLES :

14 et 15 sont-ils premiers entre eux ?

Les diviseurs de 14 sont : 1 ; 2 ; 7 ; 14

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15

Le PGCD de 14 et 15 est donc 1. Donc 14 et 15 sont premiers entre eux.

39 et 15 sont-ils premiers entre eux ?

Les diviseurs de 39 sont : 1 ; 3 ; 13 ; 39

Les diviseurs de 15 sont : 1 ; 3 ; 5 ; 15

Le PGCD de 39 et 15 est donc 3. Donc 39 et 15 ne sont pas premiers entre eux.

IV) Fraction irréductible**DEFINITION**

Dire qu'une fraction est irréductible signifie que cette fraction ne peut pas être simplifiée.

THEOREME :

Soient a et b deux nombres entiers ($b \neq 0$).

SI a et b sont premiers entre eux **ALORS** $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

PREUVE : Triviale

EXEMPLES :

- $\frac{14}{11}$ est elle une fraction irréductible ? Si on calcule le PGCD de 11 et 14 on trouve 1. 11 et 14 sont donc premiers entre eux. Par conséquent, $\frac{14}{11}$ est une fraction irréductible.
- $\frac{24}{18}$ est elle une fraction irréductible ? Si on calcule le PGCD de 24 et 18 on trouve 6. 24 et 18 ne sont donc pas premiers entre eux. Par conséquent, $\frac{24}{18}$ n'est pas une fraction irréductible.

THEOREME :

SI on simplifie une fraction $\frac{a}{b}$ par le PGCD($a ; b$) **ALORS** on obtient une fraction irréductible.

PREUVE : Triviale

Soit $d = \text{PGCD}(a ; b)$. On peut écrire : $a = m \times d$ et $b = n \times d$ où m et n sont des nombres entiers.

Comme d est le PGCD de a et b , $\text{PGCD}(n ; m) = 1$. Par conséquent, $\frac{a}{b} = \frac{n \times d}{m \times d} = \frac{n}{m}$ où n et m sont premiers entre eux. La fraction obtenue est donc irréductible.

EXEMPLE :

Soit la fraction $\frac{24}{18}$. Nous avons vu précédemment que $\text{PGCD}(24 ; 18) = 6$.

Par conséquent, $\frac{24}{18} = \frac{4 \times 6}{3 \times 6} = \frac{4}{3}$ qui est une fraction irréductible.