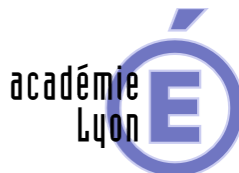


<https://maths.enseigne.ac-lyon.fr/spip/spip.php?article697>



2020, année mathémagique !

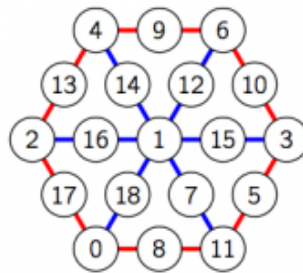
- Vie des Mathématiques - Mathématiques et Jeux -



Date de mise en ligne : lundi 6 janvier 2020

Copyright © Mathématiques - Académie de Lyon - Tous droits réservés

La figure suivante – que l'on appellera *roue* – est constituée des dix-neuf premiers entiers naturels.



Elle est « magique », dans le sens où la somme des trois nombres sur chacun des six rayons (bleus) de la roue et la somme des trois nombres sur chacun des six segments de bordure (rouges) de la roue est constant, et vaut 19. (D'une part, $0 + 8 + 11 = 11 + 5 + 3 = \dots = 19$ et, d'autre part, $1 + 18 + 0 = 1 + 7 + 11 = \dots = 19$.)

Remarque

Usuellement, la liste des entiers utilisés dans les figures magiques commence à 1 et non pas 0. La suite de la lecture expliquera pourquoi le choix de commencer à 0 a été faite.

Problématique

Une question qui nous vient rapidement à l'esprit est : « Existe-t-il une roue dont la somme magique soit égale à 2 020 ? »

Les entiers naturels p et q (non nul) étant donnés, il est rapide de vérifier que, si la roue R est magique, alors la figure N de R est aussi magique. (où chaque entier N de R est associé à l'entier $N = pqN$)

Il « suffit » donc de trouver deux entiers p et q (non nul) qui répondent au problème.

La nature affine de l'expression fait penser à une suite arithmétique !

Ainsi, une piste est de trouver une suite arithmétique (U_n) telle que $U_a U_b U_c = 2020$, où les trois indices a , b et c sont justement les trois nombres de chaque alignement. Autrement dit, ils vérifient l'égalité $abc = 19$.

En définissant de façon usuelle le terme général U_n par $U_n = U_0 + rn$ (ce qui explique au passage le choix donné plus haut de commencer la liste des entiers à 0 et non pas à 1), il vient :

$$U_a U_b U_c = U_0 r a U_0 r b U_0 r c = 3U_0(abc)r = 3U_0 19r$$

Or

$$U_a U_b U_c = 2020$$

Donc

$$3U_0 19r = 2020$$

Ce qui équivaut à

$$U_0 = (2020 19r) \div 3$$

Puisque

est entier et positif, une méthode consiste à tester, pour chacun des entiers r allant de 1 au quotient entier de 2 020 par 19 augmenté de 1, si U_0 est entier et d'afficher alors le couple (U_0, r)

Les deux entiers p et q cherchés seront alors et

$$q = r$$

$$p = U_0$$

On va écrire en langage Python un programme qui permette d'obtenir des couples

solutions que la variable t permet de dénombrer. Le quotient entier est obtenu grâce à la contre-oblique //.

```
1 t=0
2 for i in range(1,2020//19+1):
3     if (2020-19*i)%3==0:
4         t=t+1
5         print((2020-19*i)/3,i)
6 print(t)
```

L'exécution de ce programme donne trente-six couples solutions.

(Ce qui, au passage, permet d'offrir à chacun des élèves d'une classe une roue différente !)

Leur liste est donnée en annexe 1.

Prenons, par exemple, le vingt-septième couple proposé, (173, 79).

Chaque entier N de la première roue va donner l'entier de la seconde roue.

$$N = 1737$$

Ainsi, à 4 est associé et à 9 est associé

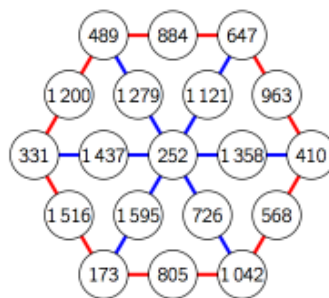
$$\begin{array}{l} 17379 \times 4 = 489 \\ 17379 \times 9 = 884 \end{array}$$

On complète le programme précédent par une fonction **roue** – de paramètres p et q – qui retourne les dix-neuf valeurs demandées :

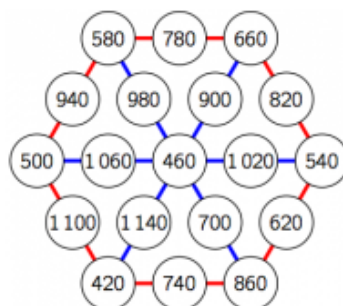
```
1 def roue(p,q):
2     return (p+4*q,p+9*q,p+6*q,p+13*q,p+14*q,p+12*q,p+18*q,p+2*q,p+16*q,p+1*q,p+15*q,
3            p+3*q,p+17*q,p+18*q,p+7*q,p+5*q,p+8*q,p+11*q)
```

Évidemment, l'exécution de **roue(0,1)** donne la roue initiale !

L'exécution de **roue(173,79)** donne les dix-neuf valeurs qui construisent la roue suivante :



De même, l'exécution de **roue(420,40)** donne celles qui construisent la roue suivante :



Et avec d'autre figures magiques ?

Les entiers naturels p et q (non nul) étant donnés, il est rapide de vérifier que, si la figure F est magique, alors la figure $F' = pqF$ est aussi magique, (où chaque entier N de F est associé à l'entier $N = pqN$ de figure F').

On peut dans la même idée transformer le carré magique ci-dessous, dont la somme magique est égale à 30 (c'est-à-dire que dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque diagonale, la somme des quatre entiers est égale à 30) :

15	2	1	12
9	7	10	4
6	8	5	11
0	13	14	3

Puisqu'il y a 4 entiers par alignement et que la somme correspondante vaut 30, la suite associée est telle que

Et, du coup, puisque l'on est amené à changer les valeurs de p et de q , on peut écrire un programme plus général dans lequel la fonction **Listepq** liste l'ensemble des couples (p, q) solutions ainsi que leur nombre t :

```
1 def Listepq(p,q):
2     t=0
3     for i in range(1,2020//q+1):
4         if (2020-q*i)%p==0:
5             t=t+1
6             print((2020-q*i)/p,i)
7     print(t)
```

On peut pousser le plaisir à créer une fonction **carre** qui donne les nouvelles valeurs dans l'ordre de lecture usuel :

```
1 def carre(p,q):
2     return(p+15*q,p+2*q,p+1*q,p+12*q,p+9*q,p+7*q,p+10*q,p+4*q,
3           p+6*q,p+8*q,p+5*q,p+11*q,p+0*q,p+13*q,p+14*q,p+3*q)
```

L'exécution du programme indique qu'il y a trente-trois solutions, dont le couple $(p, q) = (325, 24)$.

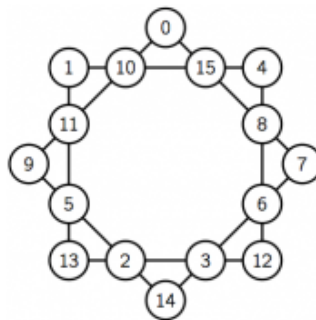
Le carré magique associé est le suivant :

685	373	349	613
541	493	565	421
469	517	445	589
325	637	661	397

Les figures magiques changeant, on ne peut pas forcément créer une fonction liée à la position des nombres, comme le font les fonctions **roue** et **carre**. On peut toutefois créer une fonction **Liste** qui, les entiers p et q étant donnés, liste les couples (i, pqi) , pour i allant de 0 à n , où n est le nombre d'entiers de chaque ensemble de la figure dont la somme est connue (pour la roue, n vaut 3 et, pour le carré magique, n vaut 4).

```
1 def Liste(n,p,q):
2     for i in range(n+1):
3         print(i,p+q*i)
```

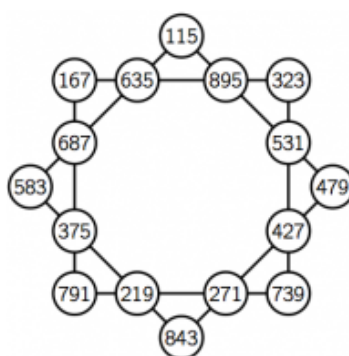
La figure suivante est construite de deux carrés sur lesquels la somme des quatre nombres sur chaque côté est égale à 30, tout comme la somme des quatre sommets de chaque carré.



Puisqu'il y a 4 entiers par alignement et que la somme correspondante vaut 30, la suite associée est telle que . C'est la même que précédemment.

On utilise alors l'un des (autres) couples

trouvés précédemment pour construire une figure solution. La figure ci-dessous est construite avec $(p, q) = (115, 52)$ = 115 et 52.



Trois autres figures magiques sont données en annexe 2, pour d'autres créations. Le lecteur trouvera bien d'autres figures sur l'e-toile !

Remarque.

Il n'y a pas forcément des couples

solutions pour une suite donnée. Par exemple, il n'y a pas de suite arithmétique à coefficients (p, q) et r entiers telle que

(car la somme

est alors divisible par 3, contrairement à 2 020). Nous intéresser à l'existence d'un couple solution nous amènerait à nous pencher sur un cas particulier d'équation diophantienne qui, bien qu'intéressant, dépasse le cadre de cet article.

Bonne année mathémagique 2020 !

Arnaud Gazagnes

NB : La figure construite à l'aide de **roue(97,91)** et que m'a envoyée Dominique Souder est à l'origine de cet article.

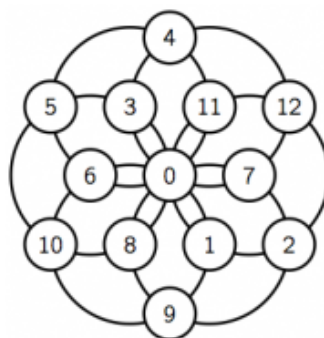
Annexe 1

Liste des trente-six couples d'entiers naturels (p, q) associés à l'équation $3p + 19q = 2\,020$:

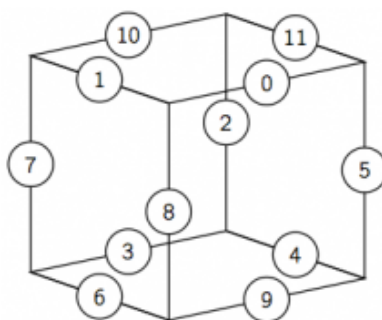
(667, 1)	(553, 19)	(439, 37)	(325, 55)	(211, 73)	(97, 91)
(648, 4)	(534, 22)	(420, 40)	(306, 58)	(192, 76)	(78, 94)
(629, 7)	(515, 25)	(401, 43)	(287, 61)	(173, 79)	(59, 97)
(610, 10)	(496, 28)	(382, 46)	(268, 64)	(154, 82)	(40, 100)
(591, 13)	(477, 31)	(363, 49)	(249, 67)	(135, 85)	(21, 103)
(572, 16)	(458, 34)	(344, 52)	(230, 70)	(116, 88)	(2, 106)

Annexe 2

La somme des cinq nombres sur chaque cercle est égale à 26.



La somme des nombres sur les quatre côtés de chaque face est égale à 22.



La somme des quatre nombres sur chacune des cinq branches est égale à 20.

