

<https://maths.enseigne.ac-lyon.fr/spip/spip.php?article677>



Tétraminos, rectangle et coloriage

- Vie des Mathématiques - Mathématiques et Jeux -



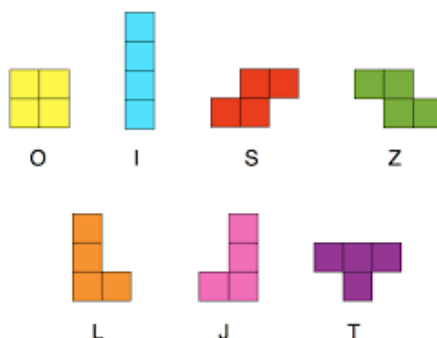
Date de mise en ligne : jeudi 12 septembre 2019

Copyright © Mathématiques - Académie de Lyon - Tous droits réservés

- Récréations Mathématiques
- Auteur : Arnaud Gazagnes : Arnaud.Gazagnes.chez.ac-lyon.fr

Un tétramino est une réunion connexe de quatre carrés unitaires. Cette connexité s'entend dans le sens où, entre deux carrés d'un polymino, il existe toujours un chemin formé de carrés qui se touchent par un côté.

Il en existe sept, dont leurs noms usuels suivent :



Ces pièces sont le support du célèbre jeu des années 80, Tétris. (Les couleurs ci-dessus sont celles que The Tetris Company, qui gère les droits du jeu, a définies).

Si, en revanche, on décide d'identifier les tétraminos qui se recouvrent après symétrie (en retournant le tétramino), alors on ne compte plus que cinq tétraminos. Autrement dit, on considère comme même pièce les pièces S et Z, d'une part, et les pièces L et J., d'autre part.

Dans le défi qui suit, on utilise donc seulement les cinq pièces réversibles non superposables.

Le défi est le suivant :

Peut-on recouvrir un rectangle d'aire 20 avec ces cinq tétraminos ?

Remarques

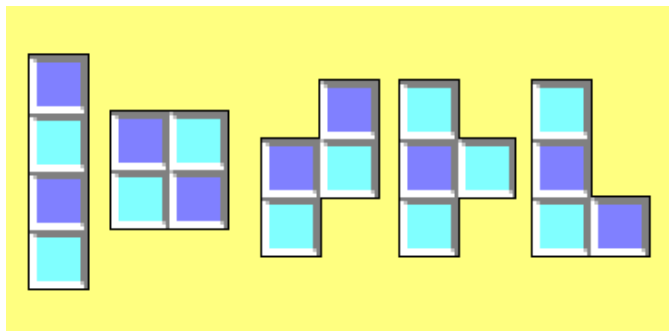
Ce défi a été donné à des élèves à différents niveaux d'enseignement, souvent sous forme de narration de recherche. Pour qui avaient rendu une copie, les réponses étaient diverses : une démonstration par exhaustion des cas pour montrer l'impossibilité, « j'ai essayé plusieurs fois et je n'y suis pas arrivé donc il n'y a pas de solution », ... L'idée de montrer la démonstration de l'impossibilité par coloriage était de mettre en avant qu'une démonstration n'était pas limitée à un exercice de géométrie en collège et qu'elle était standardisée et immuable : il existait donc divers types de démonstration ! De plus, l'idée de prendre cinq pièces plutôt que sept reposait sur une manipulation plus rapide.

La réponse à la question du défi est négative.

En voici une démonstration... par coloriage !

D'un côté, colorions le rectangle comme un damier de jeu de dames ou d'échecs : les cases seront coloriées de deux couleurs différentes, par exemple bleu clair et bleu foncé.

Il y a donc dix cases bleu clair et dix cases bleu foncé.



D'un autre côté, colorions de la même façon les cinq pièces.

Quatre pièces auront deux cases bleu clair et deux cases bleu foncé, tandis qu'une cinquième (le « T ») aura trois cases bleu clair et une case bleu foncé (ou une case bleu clair et trois cases bleu foncé.)

Par conséquent, le nombre total de cases bleu ciel sera $4 * 2 + 3$, soit 11 (ou $4 * 2 + 1$, soit 9).

Il n'y a pas le même nombre de cases bleu clair dans les deux coloriage, **ce qui montre l'impossibilité d'un tel recouvrement.**

De même, si l'on utilise l'ensemble des sept pièces données au début, il y a un total de 28 carrés unitaires.

Il faudrait donc un rectangle de quatorze cases de chacune des deux couleurs.

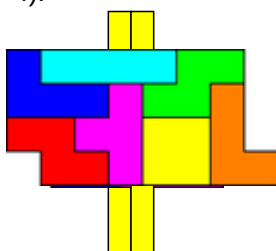
Or l'ensemble des pièces a quinze carrés d'une couleur et treize de l'autre.

L'impossibilité est encore montrée.

Pour aller un peu plus loin...

1. Si une ligne d'un rectangle de dimensions $5 * 4$ ou $7 * 4$ est « déplacée » d'un carré sur le grand côté, un ensemble de cinq ou sept tétraminos libres peut recouvrir cette nouvelle forme.

(Un damier de dimensions $5 * 4$ a dix carrés de chacune des deux couleurs. Si une rangée est « déplacée » d'un carré, elle supprime un carré d'une couleur et ajoute de l'autre couleur. Cela crée une forme composée de neuf carrés d'une couleur et de onze carrés de l'autre couleur, qui, avec l'argument développé ci-dessus, permet un recouvrement. De même pour un rectangle $7 * 4$).



2. Lorsque l'on utilise deux mêmes ensembles de pièces (chacune des cinq ou sept pièces est donc utilisée deux fois), on peut recouvrir un rectangle d'aire 40 ($2 * 20$) ou 56 ($2 * 28$).

Si l'on compte comme unique solution toutes les solutions qui ont des pièces non distinguables (comme le carré invariant par rotation d'angle droit), le nombre de solutions est égal à 783 pour un rectangle de dimensions $5 * 8$ et à 449 pour un rectangle de dimensions $10 * 4$.

Voici des solutions :

