https://maths.enseigne.ac-lyon.fr/spip/spip.php?article696

Formules d'addition et de soustraction en trigonométrie

- Enseigner - Au Lycée - Séance Pédagogique -

Date de mise en ligne : dimanche 5 janvier 2020

- Objectifs : Démontrer les formules d’addition et de soustraction en trigonométrie à l'aide de la géométrie plane.
- Niveau : 1ere - Tale.
- Auteur : Arnaud Gazagnes

Les figures ci-dessous sont extraites du livre de Roger B. NELSEN, *Preuves sans mots, Exercices de mathématiques visuelles*, paru aux Éditions Hermann en 2013.

Dans son livre, l’auteur aide son lecteur à comprendre par l’image la validité d’un énoncé mathématique, et de fournir des indications propres à stimuler la pensée mathématique.

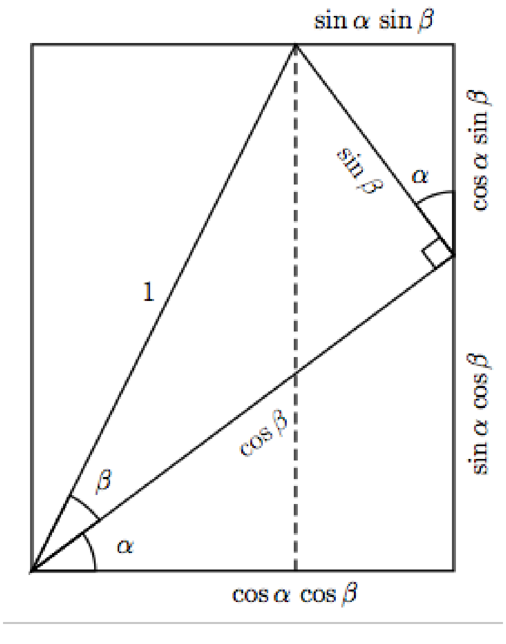
1. Premiers résultats

La première figure illustre les propriétés d’addition :

$$\cos(\alpha\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

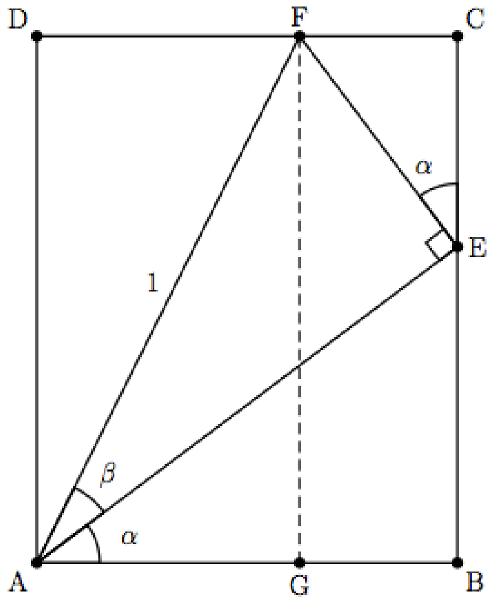
et

$$\sin(\alpha\beta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$



Justifions les deux propriétés énoncées grâce à la figure pour deux angles dont la mesure est comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians, tout comme celle de leur somme.

On considère un rectangle ABCD. Sur le segment [BC], on place un point E :



On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAE}$

.

Sur le segment [CD], on place le point F tel que le triangle AEF soit rectangle en E.

On note β la mesure en radians de l'angle $\widehat{EAF}$

.

(Par construction, une mesure de l'angle $\widehat{CEF}$

est α)

Le point G sur le segment [AB] est tel que FCBG soit un rectangle.

La mesure de l’angle $\widehat{FAG}$

est ainsi égale à $\alpha\ \beta$

.

On pose AF = 1.

- À l'aide du triangle AEF, on obtient :
  AE = cos β et EF = sin β
- À l'aide du triangle ABE, on obtient :
  AB = AE cos α = cos α cos β et BE = AE sin α = sin α cos β
- À l'aide du triangle CEF, on obtient :
  CE = EF cos α = cos α sin β et CF = EF sin α = sin α sin β
- À l'aide du triangle AFG, on obtient :
  AG = cos(α + β) et FG = sin(α + β)

Or AG = AB – BG (car A, G et B sont alignés dans cet ordre).

De plus, BG = CF.

Ainsi AG = AB – CF.

Avec les résultats précédents, on obtient finalement :

$$\cos(\alpha\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

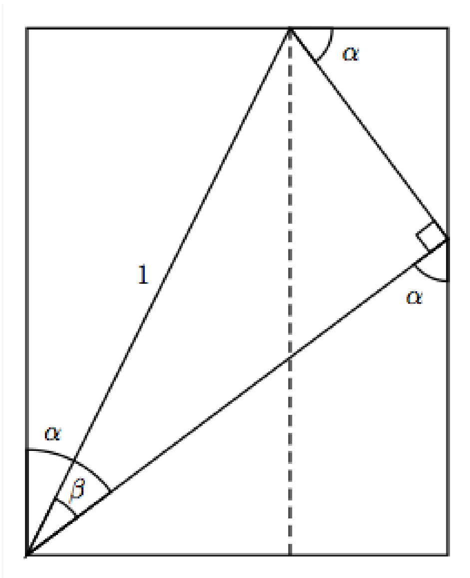
De plus, FG = BC et BC = BE + EC (car B, E et C sont alignés dans cet ordre).
Donc FG = BE + EC.

Avec les résultats précédents, on obtient finalement :

$$\sin(\alpha\beta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$$

2. Deuxièmes résultats

Pour les formules de différences, il est tentant d’exprimer cos(α – β) et sin(α – β) à l’aide des résultats précédents et d’utiliser la parité des fonctions cos et sin. Mais ce n’est pas dans l’esprit de l’auteur. Celui-ci propose une autre figure pour illustrer les deux formules de différence :



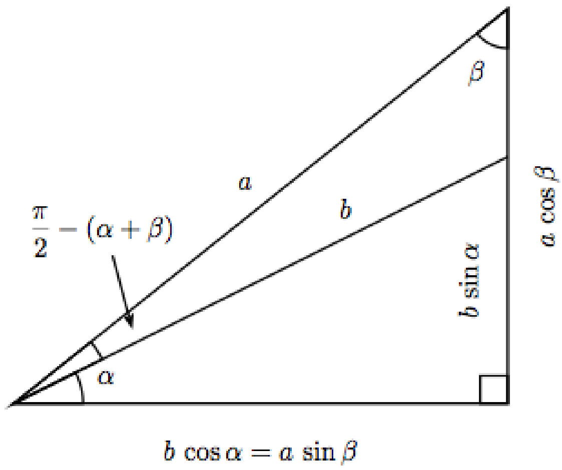
$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ et **$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$**

Le lecteur saura justifier, comme plus haut, ces deux propriétés !

3. Troisièmes résultats

L'auteur reprend une figure de Sidney H. Kung pour retrouver la formule donnant cos(α +β), en passant par les aires de triangles et en utilisant la relation $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

.



$$\frac{1}{2}ab\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha\beta)\right]=\frac{1}{2}b\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{2}a\sin\beta\sin\alpha$$

Donc

$$\cos(\alpha\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$