Un théorème limite: le théorème limite central
Fonctions de répartition et applications

Hélène Fontaine

Formation T S T ES

7 décembre 2012

Introduction

Le théorème de Moivre-Laplace en terminale S :

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)

Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, *alors pour tous réels* a *et* b *tels que* $a < b$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \in [a,b]) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$$

où $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Introduction

Le théorème limite central dans sa version plus classique :

Théorème (Théorème limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance μ et une variance σ^2 non nulle.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$.

*Alors la suite (S_n^*) **converge en loi** vers une variable aléatoire qui suit une loi **normale centrée réduite**.*

- Convergence en loi :

- Convergence en loi :
  Convergence des fonctions de répartition.

- Convergence en loi :
  Convergence des fonctions de répartition.
- Loi normale centrée réduite et les lois normales

- Convergence en loi :
  Convergence des fonctions de répartition.
- Loi normale centrée réduite et les lois normales
- Du théorème limite central au théorème de Moivre-Laplace

- Convergence en loi :
  Convergence des fonctions de répartition.
- Loi normale centrée réduite et les lois normales
- Du théorème limite central au théorème de Moivre-Laplace
- Un autre théorème limite : la loi faible des grands nombres.

1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
- Définition et exemples
- Propriétés

2 Loi normale
- La loi normale centrée réduite.
- Loi normale

3 Convergence en loi
- Définition
- Exemples

4 Théorème limite central.
- Enonces
- Théorème de Moivre Laplace
- loi faible des grands nombres

Définition

Une fonction

- définie pour toute variable aléatoire.

Définition

Une fonction

- définie pour toute variable aléatoire.
- caractérisant la loi de la variable aléatoire

Définition

Une fonction

- définie pour toute variable aléatoire.
- caractérisant la loi de la variable aléatoire

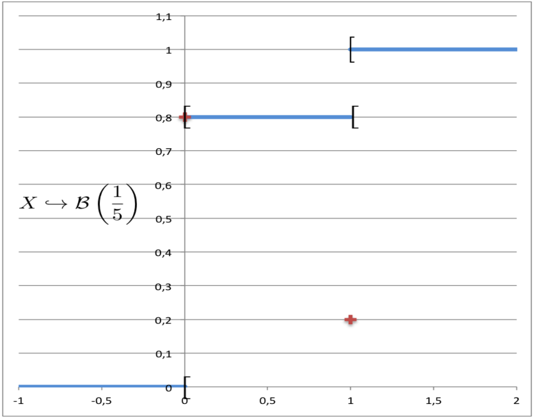
Définition

Soit X une variable aléatoire réelle.
La fonction de répartition de X est

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array} .$$

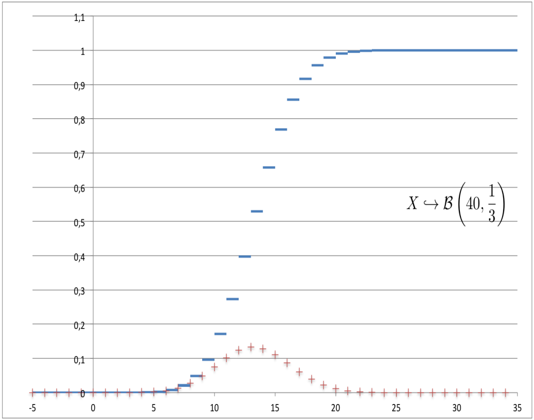
Exemples

Loi de Bernoulli.



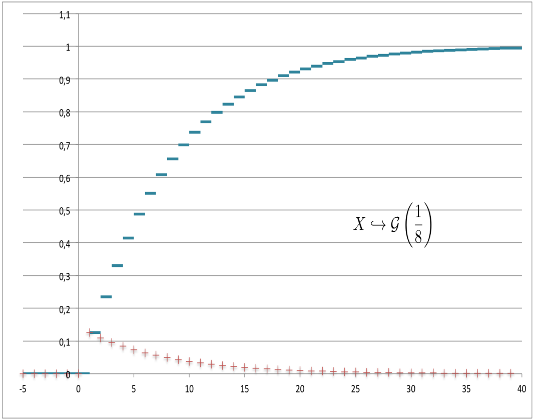
Exemples

Loi binomiale



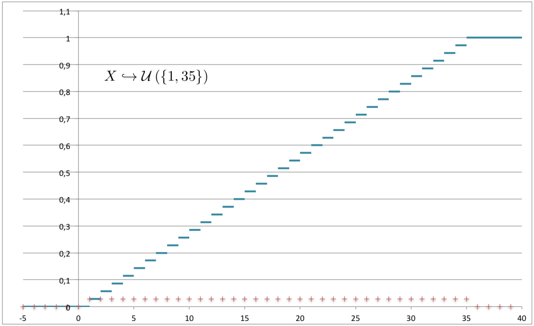
Exemples

Loi géométrique



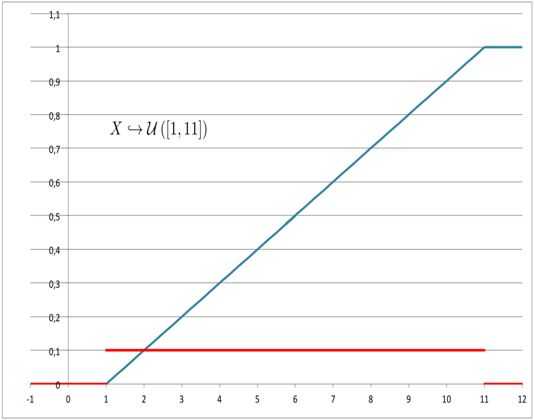
Exemples

Loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$



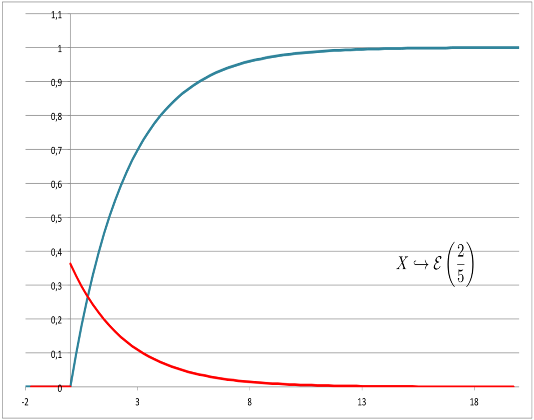
Exemples

Loi uniforme sur $[a, b]$



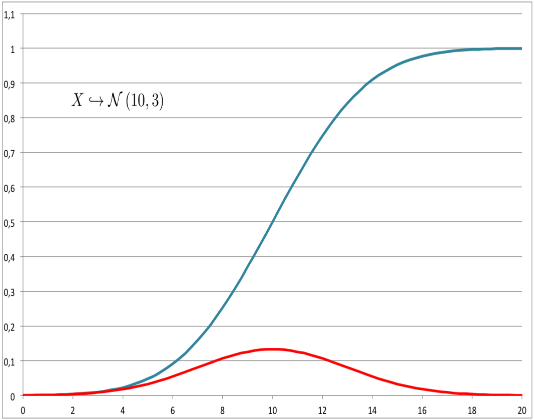
Exemples

Loi exponentielle



Exemples

Loi normale



Propriétés

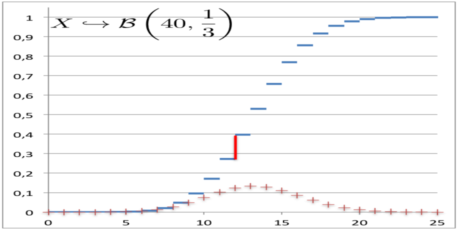
Proposition **(Croissance de F_X)**

- F_X *est croissante sur* $\mathbb{R}$.
- *Et* $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Propriétés

Proposition

- F_X *est* $\mathcal{C}^0$ *à droite en tout* x *de* $\mathbb{R}$.
- $F_X(x) - \lim\limits_{y \overset{<}{\to} x} F_X(y) = P(X = x)$.
- F_X *est* $\mathcal{C}^0$ *en tout* x *tel que* $P(X = x) = 0$.

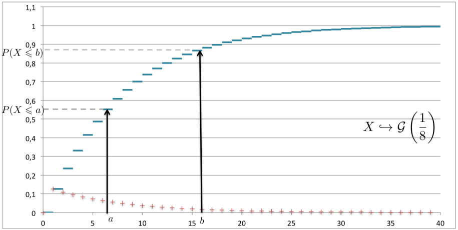


Probabilité que X appartienne à un intervalle

Proposition

Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels.

- $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- *Si de plus X est une variable aléatoire à densité ou si $P(X = a) = 0$, alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.*

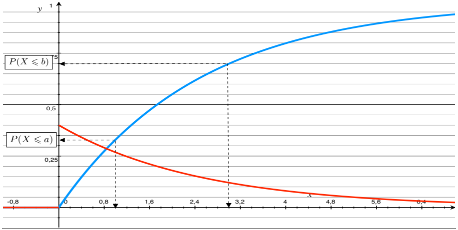


Probabilité que X appartienne à un intervalle

Proposition

Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels.

- $P(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- *Si de plus X est une variable aléatoire à densité ou si $P(X = a) = 0$, alors $P(a \leqslant X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a)$.*

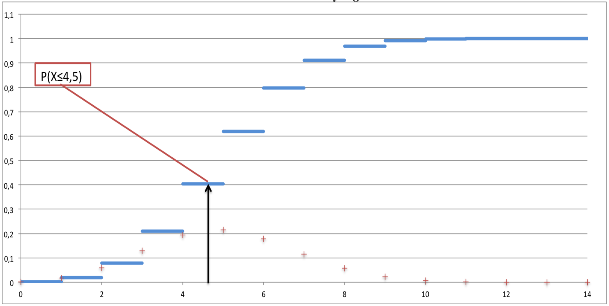


Liens avec la loi d'une variable aléatoire discrète

Si X est une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$.
Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

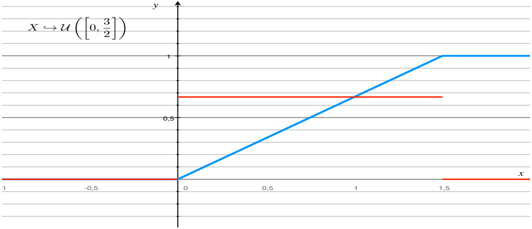
$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X = i)$$



Liens avec la loi d'une variable aléatoire à densité

Si X est une variable aléatoire à densité,

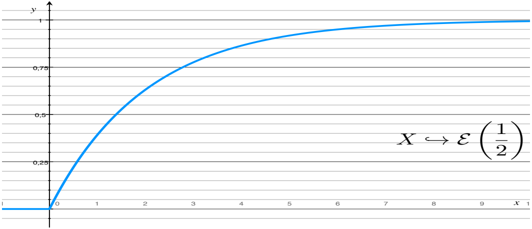
Alors F_X est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,
F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
Une densité de X est la dérivée de F_X.
F_X est alors la primitive d'une densité de X qui s'annule en $-\infty$.



Liens avec la loi d'une variable aléatoire à densité

Si X est une variable aléatoire à densité,

Alors F_X est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,
F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.
Une densité de X est la dérivée de F_X.
F_X est alors la primitive d'une densité de X qui s'annule en $-\infty$.



1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
- Définition et exemples
- Propriétés

2 Loi normale
- La loi normale centrée réduite.
- Loi normale

3 Convergence en loi
- Définition
- Exemples

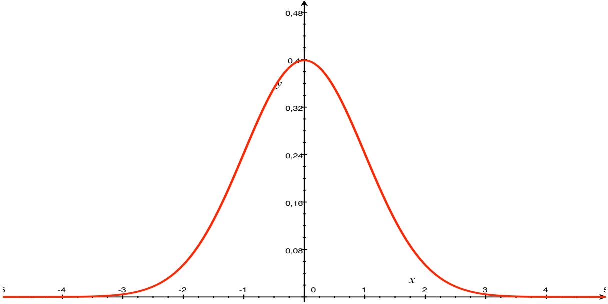
4 Théorème limite central.
- Enonces
- Théorème de Moivre Laplace
- loi faible des grands nombres

Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite quand une densité de X est

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \end{array} \right.$$

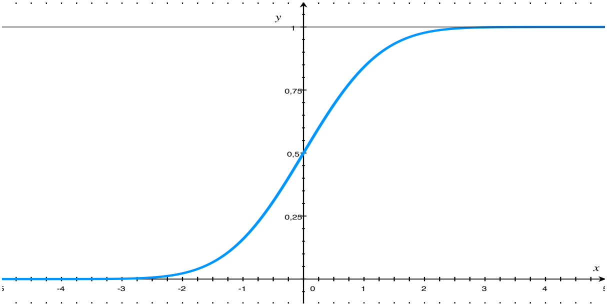
Remarque : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t = 1.$



Fonction de répartition

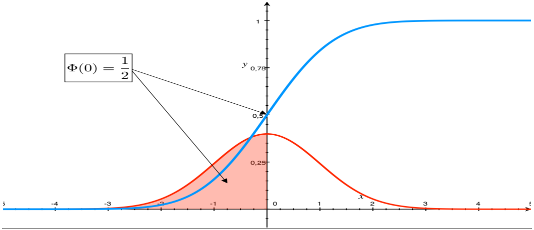
La fonction de répartition d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale centrée réduite est la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$



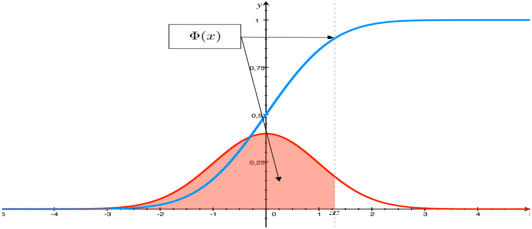
Proposition (Propriétés de la fonction de répartition.)

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.



Proposition (Propriétés de la fonction de répartition.)

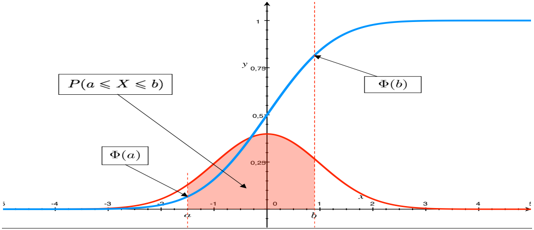
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- *Pour tout réel* x, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.



Proposition (Propriétés de la fonction de répartition.)

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- *Pour tout réel* x, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.
- *Pour tout couple* (a, b) *de réels tels que* $a < b$,

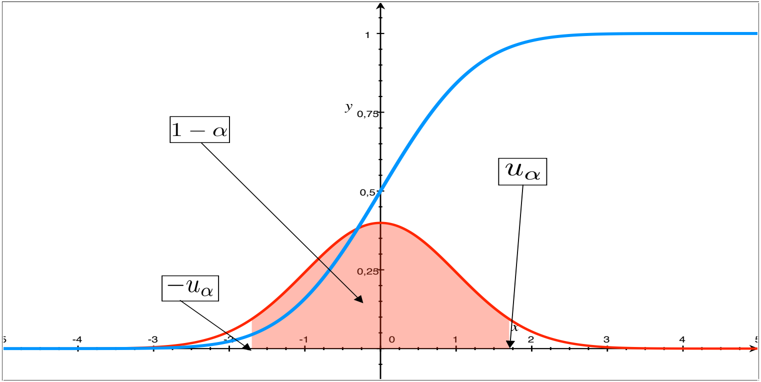
$$\Phi(b) - \Phi(a) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \,\mathrm{d}t.$$



Théorème

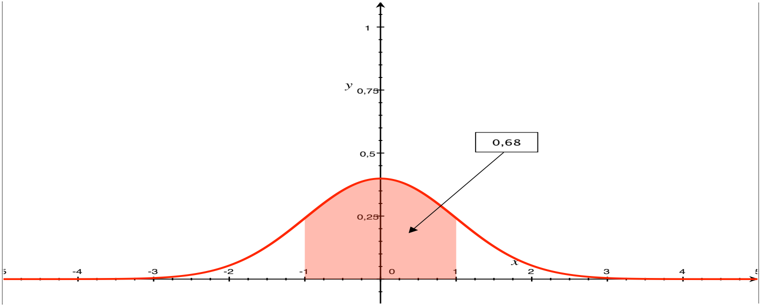
Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.
Alors $\forall \alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que

$$P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$$



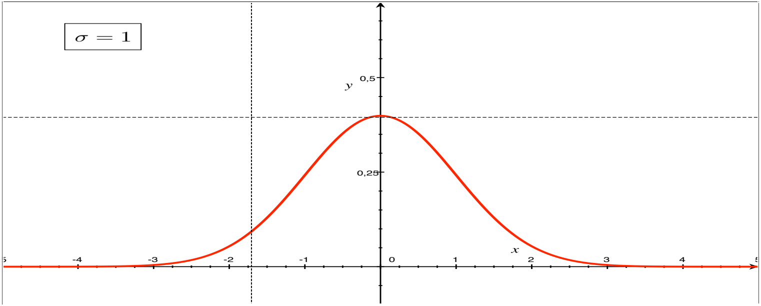
Proposition (Espérance et variance)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance et $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$.



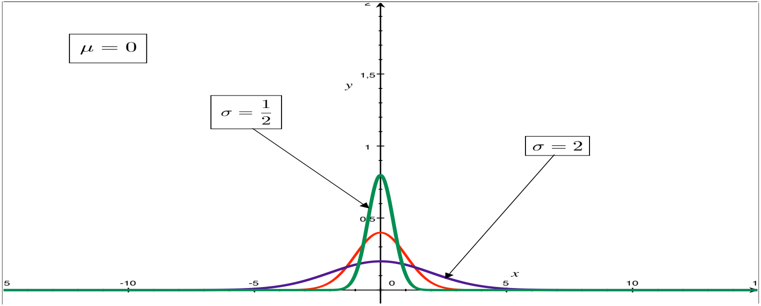
Definition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre (μ, σ^2) quand une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Definition

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre (μ, σ^2) quand une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$



Proposition (Lien avec la loi normale centrée réduite.)

- *Soit* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  Alors la variable aléatoire $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ *suit une loi normale centrée réduite.*
- *Soit* $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
  Alors la variable aléatoire $\sigma X + \mu$ *suit une loi normale de paramètre* (μ, σ^2).

Proposition (Propriétés de la fonction de répartition)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Alors pour tout réel x, $F_X(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.
Et pour tout couple (a, b) *de réels tels que* $a < b$,

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leqslant X^* \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Stabilité

Proposition (Transformation affine)

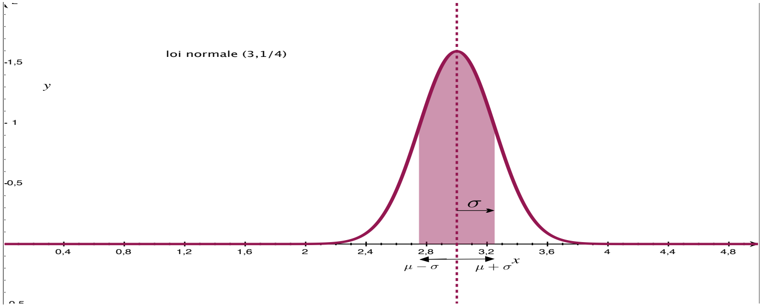
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Alors* $(aX + b) \hookrightarrow \mathcal{N}(a\mu + b, a\sigma^2)$*.*

Ainsi si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,
alors X admet une espérance et une variance.
$E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Proposition (Somme)

Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *et* $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$*,* X *et* Y *sont indépendantes.*
Alors $X + Y$ *suit une loi normale de paramètre* $(\mu + \mu', \sigma^2 + \sigma'^2)$*.*

Les intervalles des "un, deux, trois sigmas".
Ainsi $P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0,68 (10^{-2}\text{près})$.
$P(m-2\sigma \leqslant X \leqslant m+2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0,95 (10^{-2}\text{près})$.
$P(m-3\sigma \leqslant X \leqslant m+3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \simeq 0,997 (10^{-3}\text{près})$.



1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
- Définition et exemples
- Propriétés

2 Loi normale
- La loi normale centrée réduite.
- Loi normale

3 Convergence en loi
- Définition
- Exemples

4 Théorème limite central.
- Enonces
- Théorème de Moivre Laplace
- loi faible des grands nombres

Definition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires.
On dit que (X_n) converge en loi vers X quand $\lim\limits_{n \to +\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pour tout réel x en lequel F_X est continue.

Proposition (Dans le cas discret)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes et telles que $X_n(\Omega) \subseteq N$.
(X_n) converge en loi vers X si et seulement si $\forall k \in N$,
$\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$.

Convergence d'une loi hypergéométrique vers une loi binomiale.

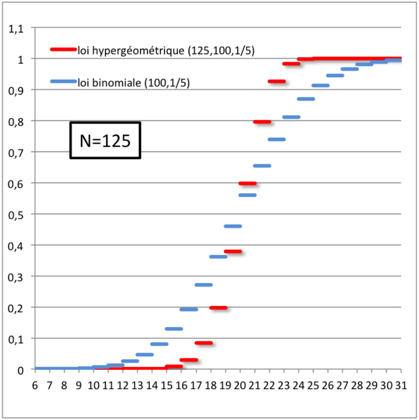
Si X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).
X_N converge en loi vers X qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

Le nombre de boules blanches tirées lors de n tirages sans remise dans une urnes contenant N boules et une proportion p de blanches suit une loi hypergéométrique.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X_N = k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{qN}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

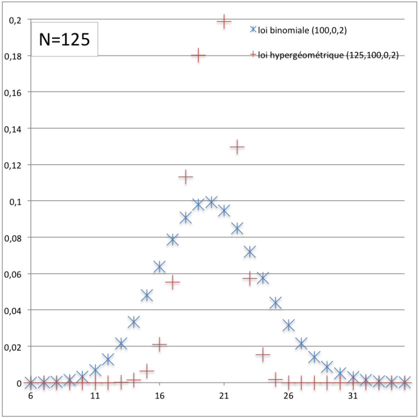
Convergence d'une loi hypergéométrique vers une loi binomiale.

Si X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).
X_N converge en loi vers X qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p).



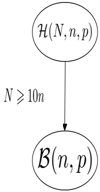
Convergence d'une loi hypergéométrique vers une loi binomiale.

Si X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).
X_N converge en loi vers X qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p).



Convergence d'une loi hypergéométrique vers une loi binomiale.

Si X_N suit une loi hypergéométrique de paramètre (N, n, p).
X_N converge en loi vers X qui suit une loi binomiale de paramètre (n, p).



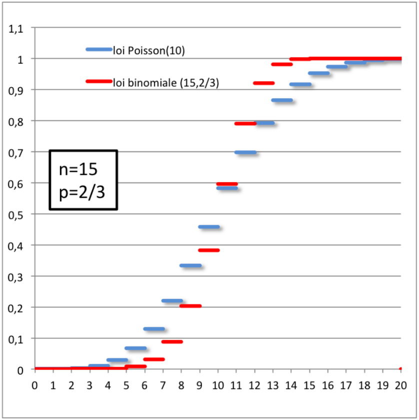
Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.

Si X_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
X_n converge en loi vers X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

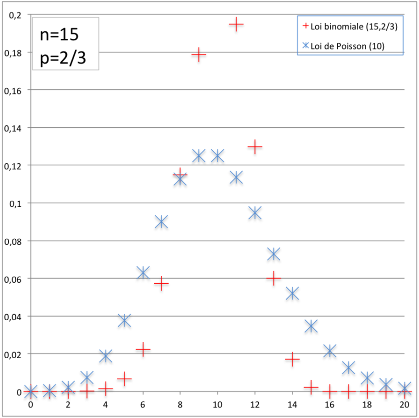
Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.

Si X_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
X_n converge en loi vers X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.



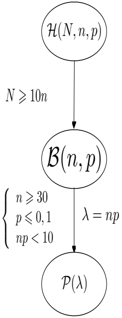
Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.

Si X_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
X_n converge en loi vers X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.



Convergence de la loi binomiale vers une loi de Poisson.

Si X_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.
X_n converge en loi vers X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.



1 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
- Définition et exemples
- Propriétés

2 Loi normale
- La loi normale centrée réduite.
- Loi normale

3 Convergence en loi
- Définition
- Exemples

4 Théorème limite central.
- Enonces
- Théorème de Moivre Laplace
- loi faible des grands nombres

Théorème (Théorème limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance μ et une variance σ^2.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $S_n^* = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$.

Alors la suite (S_n^*) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

S_n est le nombre d'apparitions.

Théorème (Théorème de la limite centrée (autre version))

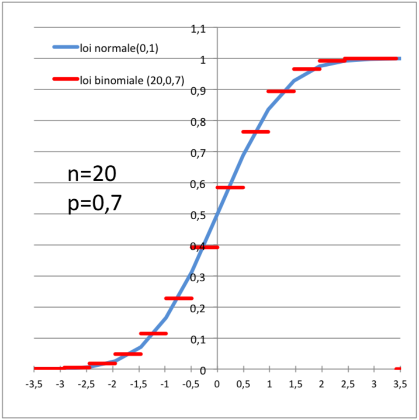
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance μ et une variance σ^2.

On pose $F_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}$ et $F_n^* = \frac{F_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

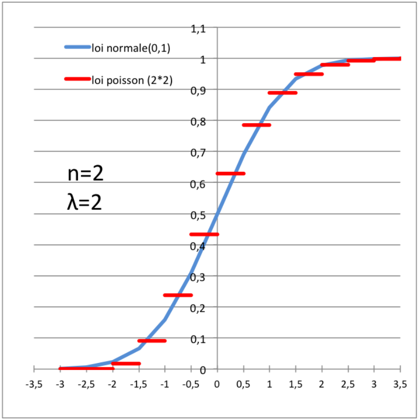
Alors la suite (F_n^*) converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

F_n est la fréquence d'apparition.
$S_n^* = F_n^*$.

Convergence d'une loi binomiale vers une loi normale



Convergence d'une loi de Poisson vers une loi normale



Autre écriture de ce théorème

Théorème (Théorème limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance μ et une variance non nulle σ^2.
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Alors pour tout couple (a, b) de réels tels que $a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Autre écriture de ce théorème

Théorème (Théorème limite central)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance μ et une variance non nulle σ^2.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors pour tout couple (a,b) de réels tels que $a < b$,

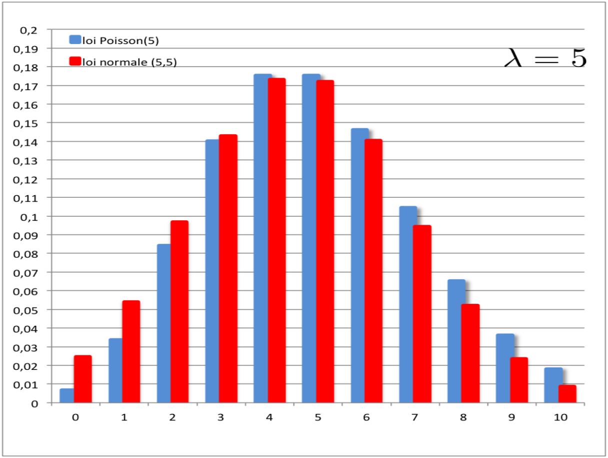
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore $\lim_{n\to+\infty} P(a\sigma\sqrt{n} + n\mu \leqslant S_n \leqslant b\sigma\sqrt{n} + n\mu) = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Une valeur approchée de $P(a\sigma\sqrt{n} + n\mu \leqslant S_n \leqslant b\sigma\sqrt{n} + n\mu)$ est $\Phi(b) - \Phi(a)$.

Une valeur approchée de $P(\alpha \leqslant S_n \leqslant \beta)$ est $\Phi\left(\frac{\beta - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$

En particulier si S_n prend des valeurs entières,
une valeur approchée de $P(S_n = k)$ est $\Phi\left(\frac{k+\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{k-\frac{1}{2}-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$
C'est-à-dire $F_X(k+\frac{1}{2}) - F_X(k-\frac{1}{2})$ où X suit une loi normale $(n\mu, n\sigma)$.



Cas où X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p alors S_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)

Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Alors $S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ *converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.*

Dit autrement

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)

Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Alors pour tout couple (a,b) *de réels tels que* $a<b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

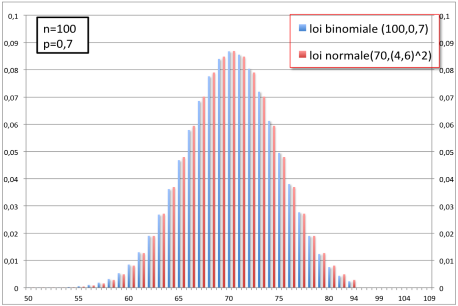
Dit autrement

Théorème (Théorème de Moivre-Laplace)

Soit $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Alors pour tout couple (a,b) *de réels tels que* $a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$



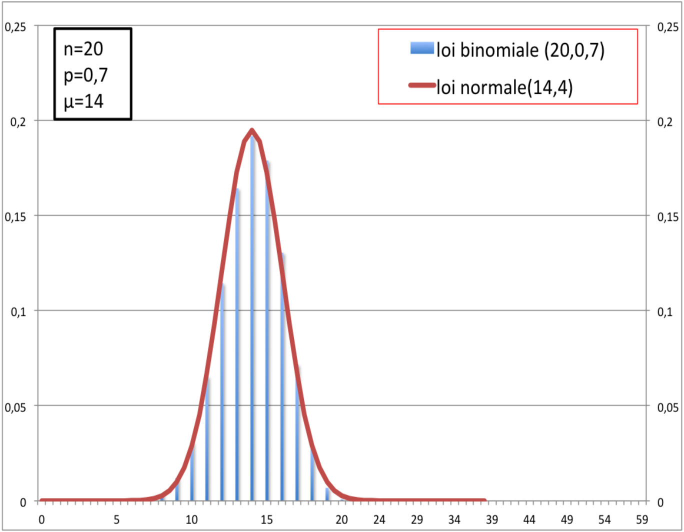
Des approximations

Ainsi une valeur approchée de $P(\alpha \leqslant S_n \leqslant \beta)$

serait $\Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right)$

Ou encore la fonction de répartition d'une loi binomiale de paramètre (n, p) peut être approchée par la fonction de répartition d'une loi normale de paramètre (np, npq)

Des approximations



Des approximations

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(N,n,p) \arrow[d, "N \geqslant 10n"'] \\ \mathcal{B}(n,p) \end{tikzcd}$$

Théorème (loi faible des grands nombres)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées c'est-à-dire de même loi. On suppose que les variables aléatoires X_n admettent une espérance que l'on notera μ et une variance.

Alors la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine μ ou encore $\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

Soit X_i une variable aléatoire caractéristique de l'événement A.
Alors la fréquence des résultats tend vers $P(A)$.
Dans la loi faible des grands nombres, il est dit que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ est probablement proche de μ, mais il est possible qu'un certain nombre de réalisations donnent des écarts importants entre $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ et μ, voire même un nombre infini de réalisation dont la probabilité reste très faible.