Intervalle de fluctuation

ou

intervalle de confiance?

Notations

X_n désigne une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$.

F_n désigne la variable aléatoire fréquence $\frac{X_n}{n}$

I-Intervalle de fluctuation

II-Intervalle de confiance

III-Quelles utilisations?

IV- Exemples

I- Intervalle de fluctuation

Définition:

Soit $\alpha \in]0;1[$.

On appelle intervalle de fluctuation de F_n au seuil $1-\alpha$ tout intervalle $[a;b]$ tel que :

$$P(F_n \in [a;b]) \geq 1 - \alpha.$$

On a vu les années précédentes deux intervalles de fluctuation au seuil 0,95 :

- En seconde, pour $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

- En première, l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où

a est le plus petit entier tel que

$$P(X_n \leq a) > 0{,}025$$

et b le plus petit entier tel que

$$P(X_n \leq b) \geq 0{,}975.$$

Théorème-définition:

Pour tout $\alpha \in]0;1[$,

$$\lim_{n \to +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$$

avec

$$I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Pour $n \geq 30, np \geq 5 \; et \; n(1-p) \geq 5$,
I_n est appelé **intervalle de fluctuation** asymptotique.

II- Intervalle de confiance

Définition:

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance $1-\alpha$ est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire déterminé à partir de F_n contenant la proportion p avec une probabilité de $1-\alpha$.

Théorème

Pour n suffisamment grand,

$$P\left(p \in \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geq 0{,}95.$$

Utilisation

Si la fréquence f observée sur un échantillon de taille $\boldsymbol{n \geq 30}$ vérifie $\boldsymbol{nf \geq 5}$ et $\boldsymbol{n(1-f) \geq 5}$, on utilise l'intervalle de confiance au seuil $0{,}95$

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

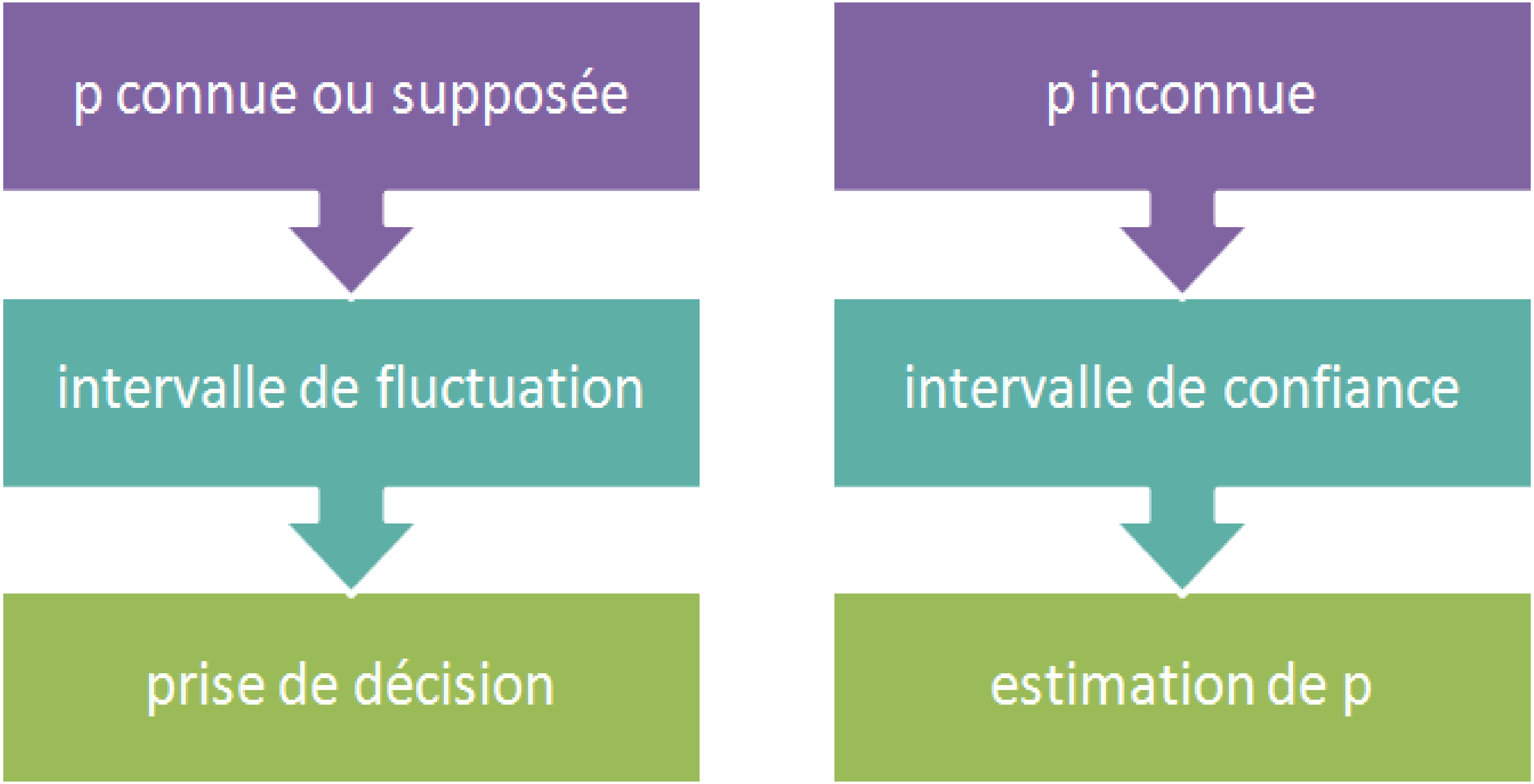
Éviter de dire :

« p a une probabilité de 0,95 d'être dans l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ».

Mais conclure :

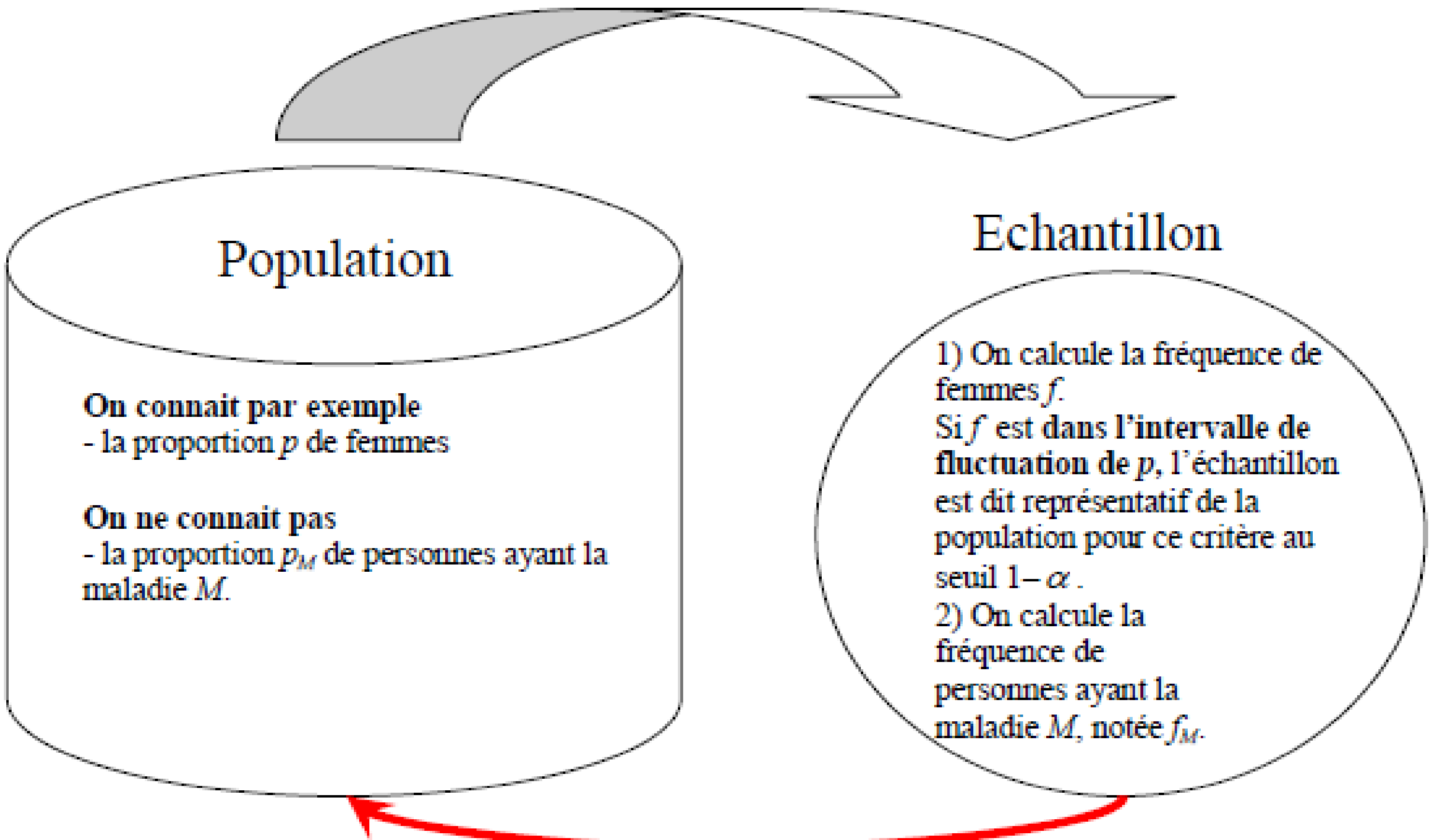
« l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de la proportion inconnue p au niveau de confiance 0,95 ».

III- Quelles utilisations?



1

Echantillonnage : sélectionner un échantillon de taille n par tirage au sort de la population
Déterminer les **intervalles de fluctuation** à partir des informations connues dans la population ou fixées



2

Estimation : à partir des données de l'échantillon on estime les paramètres inconnus de la population par **l'intervalle de confiance** au niveau de confiance de $1-\alpha$.

Illustration

Un même problème de lancer de dé peut être envisagé sous les deux aspects.

- Je pense qu'il est équilibré. J'effectue 1 000 lancers, je calcule la fréquence du six et j'utilise l'intervalle de fluctuation pour prendre une décision: confirmer ou non l'hypothèse.

- Je pense qu'il n'est pas équilibré et je cherche une estimation de la probabilité de faire six à l'aide d'un intervalle de confiance déterminé à partir de 1 000 lancers.

IV- Exemples

Le document « ressources » propose de nombreux exemples. En particulier :

- Prise de décision (page 22).
- Notion d'échantillon représentatif puis estimation d'une proportion (page 31).
- Exploitation de l'intersection de deux intervalles de confiance (page 40).