

Devoir maison sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Document de travail GRD Lycée



Les livres de Philosophie qualifient souvent de “crise profonde” la découverte des nombres irrationnels. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et l'existence de nombres dits “incommensurables” va à l'encontre de la vision du monde que s'en font les Pythagoriciens et leur École. Hip-pase de Métaponte aurait été exclu de l'école après avoir révélé cette découverte. On raconte qu'il aurait péri dans un naufrage.



1. Recherche documentaire :

Présenter en cinq lignes une biographie du philosophe et mathématicien Hippase de Métaponte. Expliquer ensuite, le plus simplement possible, ce que sont des nombres incommensurables.

2. Dans la peau d'Hippase :

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous allons supposer que nous faisons fausse route et qu'il est rationnel et voir jusqu'où cela nous mène.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il peut donc s'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls.

(a) En utilisant l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, montrer que $p^2 = 2 \times q^2$.

(b) Suivant le dernier chiffre de p , quel est le dernier chiffre de son carré ? Compléter le tableau suivant :

Dernier chiffre de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de p^2										

(c) Suivant le dernier chiffre de q , quel est le dernier chiffre de $2 \times q^2$? Compléter le tableau suivant :

Dernier chiffre de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de $2 \times q^2$										

(d) En supposant que l'égalité $p^2 = 2 \times q^2$ est vraie, quelle est la seule possibilité pour le dernier chiffre de ces deux nombres ?

(e) Dans ce cas, par quel chiffre se termine p et par quels chiffres peut se terminer q ?

(f) La fraction $\frac{p}{q}$ est elle irréductible ?

(g) Conclure.