Vers une fonction égale à sa dérivée (1)

Pour les élèves qui ne prendront ni la spécialité ni mathématiques complémentaires en Terminale

On définit les fonctions *f* et *g* sur $[0;+\infty[$ par :

- $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}$;
- $g(x)=f'(x)$.

1) Pour tout *x* de $[0;+\infty[$, déterminer $g(x)$ (on simplifiera autant que possible les fractions obtenues).
2) Etudier les variations de *f* et *g* sur $[0;+\infty[$.
3) Tracer (sur la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel) les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* sur $[0;4]$.
Que constate-t-on ?
4) Par lecture graphique, résoudre l'inéquation $|f(x)-f'(x)|\leq 1$.
Recopier et compléter la phrase suivante :
« Pour tout *x* de.........., la différence entre *f* et sa …......... semble être …....... . »
5) Résoudre l'inéquation $|f(x)-f'(x)|\leq 1$ par le calcul.
On admet que la fonction qui à *x* associe $\sqrt[8]{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Vers une fonction égale à sa dérivée (2)

Pour les élèves qui prendront mathématiques complémentaires en Terminale

Partie A :

On définit sur $[0;+\infty[$ les fonctions f_0 , f_1 et f_2 par $f_0(x)=1$, $f_1(x)=1+x$ et $f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$.

1) Pour tout *x* de $[0;+\infty[$, déterminer $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$. Que constate-t-on ?
2) Déterminer une fonction f_3 telle que pour tout *x* de $[0;+\infty[$ $f_3'(x)=f_2(x)$ et $f_3(0)=1$.
On construit ainsi par récurrence une suite de fonctions telles que pour tout entier naturel *i*, $f_{i+1}'=f_i$ et $f_i(0)=1$.
On admet que pour tout *x* de $[0;+\infty[$, $f_7(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$.
3) Pour tout *x* de $[0;+\infty[$, déterminer $f_8(x)$.

Partie B :

1) Etudier les variations de f_7 et f_8 sur $[0;+\infty[$.
2) Tracer (sur la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel) les courbes représentatives des fonctions f_7 et f_8 sur $[0;4]$.
Que constate-t-on ?
3) Par lecture graphique, résoudre l'inéquation $|f_8(x)-f_8'(x)|\leq 1$.
Recopier et compléter la phrase suivante :
« Pour tout *x* de.........., la différence entre f_8 et sa …......... semble être …....... . »
4) Résoudre l'inéquation $|f_8(x)-f_8'(x)|\leq 1$ par le calcul.
On admet que la fonction qui à *x* associe $\sqrt[8]{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Vers une fonction égale à sa dérivée (3)

Pour les élèves qui prendront la spécialité mathématqiues en Terminale

Partie A :

On définit sur $[0;+\infty[$ les fonctions f_0, f_1 et f_2 par $f_0(x)=1$, $f_1(x)=1+x$ et $f_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$.

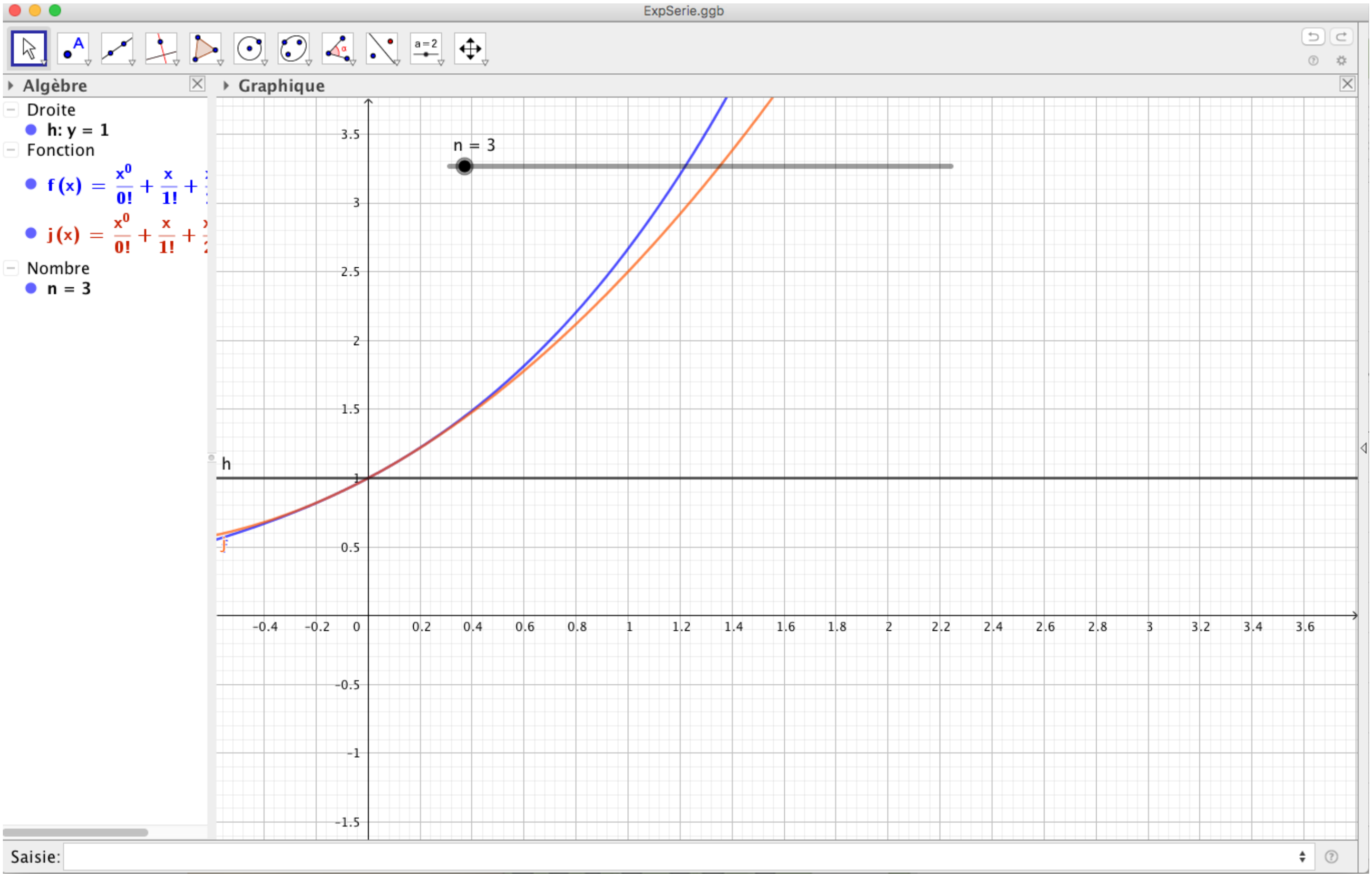
1) Pour tout x de $[0;+\infty[$, déterminer $f_1'(x)$ et $f_2'(x)$. Que constate-t-on ?
2) Déterminer une fonction f_3 telle que pour tout x de $[0;+\infty[$ $f_3'(x)=f_2(x)$ et $f_3(0)=1$.
3) On construit par récurrence une suite de fonctions telles que pour tout entier naturel i, $f_{i+1}'=f_i$ et $f_i(0)=1$. Sur $[0;+\infty[$, $f_i(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+...+a_ix^i$.
a) Donner les coefficients a_0 , a_1 et a_2 .
b) Pour tout entier naturel i déterminer la relation entre a_{i+1} et a_i .
4) Pour tout x de $[0;+\infty[$, déterminer $f_8(x)$.

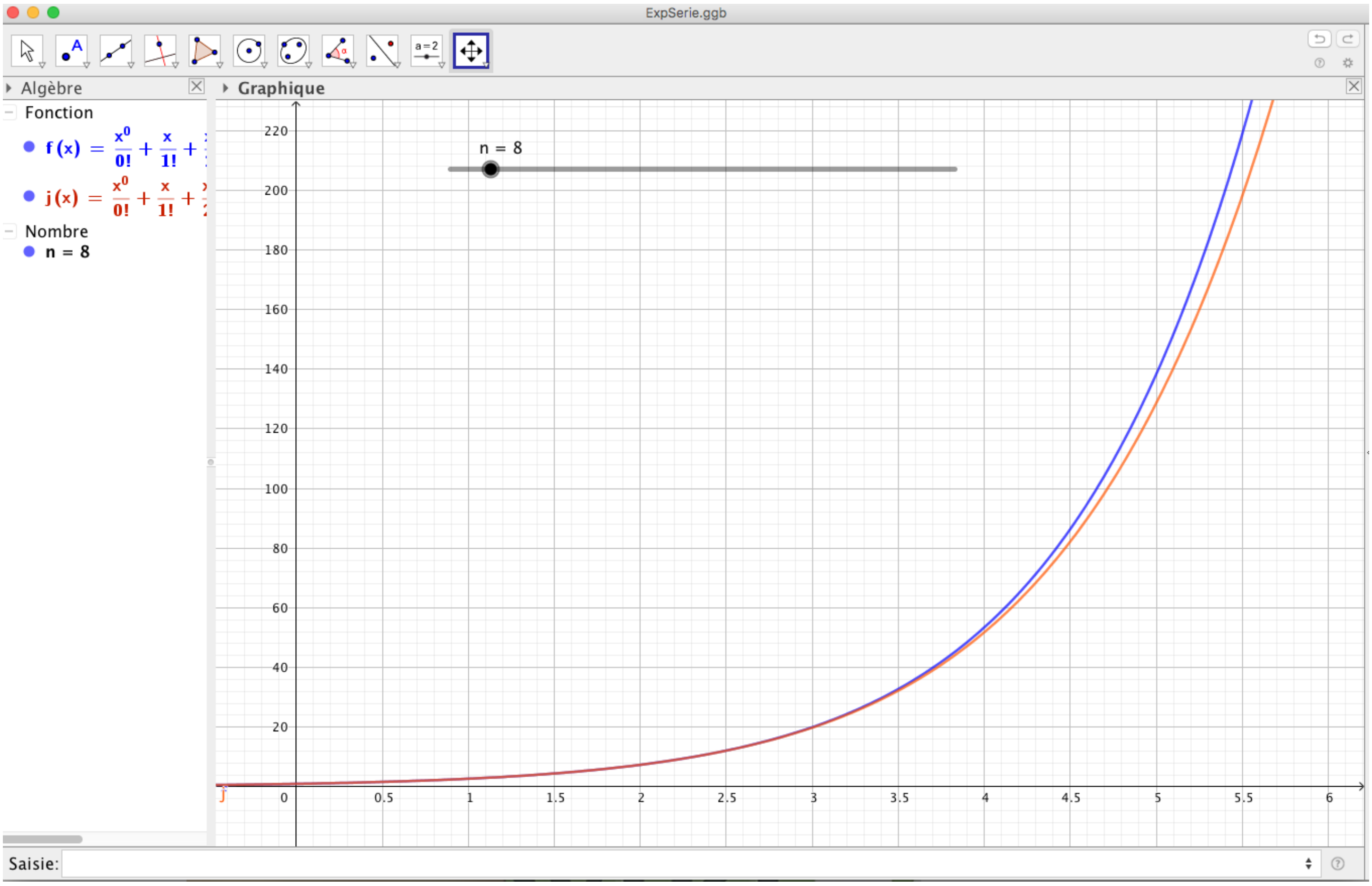
Partie B :

1) Etudier les variations de f_7 et f_8 sur $[0;+\infty[$.
2) Tracer (sur la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel) les courbes représentatives des fonctions f_7 et f_8 sur $[0;4]$.
Que constate-t-on ?
3) Par lecture graphique, résoudre l'inéquation $|f_8(x)-f_8'(x)|\leq 1$.
Recopier et compléter la phrase suivante :
« Pour tout x de.........., la différence entre f_8 et sa …......... semble être …....... . »
4) Résoudre l'inéquation $|f_8(x)-f_8'(x)|\leq 1$ par le calcul.
On admet que la fonction qui à x associe $\sqrt[8]{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Partie C :

Déterminer le plus petit entier n tel que quelque soit x dans $[0;8]$, $|f_n(x)-f_n'(x)|\leq 1$.


ExpSerie.ggb
Algèbre
Graphique
Droite
h: y = 1
Fonction
f(x) = x^0/0! + x/1! +
j(x) = x^0/0! + x/1! +
Nombre
n = 3
n = 3
h
Saisie:


ExpSerie.ggb
Algèbre
Graphique
Fonction
f(x) = x^0/0! + x/1! +
j(x) = x^0/0! + x/1! +
Nombre
n = 8
n = 8
Saisie: