Analyse du DM différencié :

Les profils d'élèves en classe de première l'an prochain seront assez variés, mais pas seulement dans leur niveau en mathématiques, également dans leur parcours scolaire. Aussi, l'idée de ce DM est non pas de graduer le niveau de difficulté mais de proposer des exercices dans des registres différents, correspondant à plusieurs parcours possibles pour les élèves, tout en évaluant les mêmes savoir-faire, à niveau de difficulté égale.

Ainsi, au travers de trois situations différentes : une évolution de population pour les élèves davantage portés sur les sciences de la vie et de la terre, un problème d'acoustique pour ceux qui s'intéressent aux sciences physiques, et une évolution de capital pour les élèves qui auraient un choix de spécialités axé sur les sciences économiques, ce DM permet de développer les six grandes compétences travaillées dans les cycles précédents :

- chercher, expérimenter, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- modéliser, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- représenter, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique…), changer de registre ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- calculer, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- communiquer un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

Mode d'emploi :

Ce DM nécessitant peu de connaissances concernant la fonction exponentielle, il peut être donné dès le début du chapitre, après les premières définitions, à condition d'avoir vu auparavant le chapitre sur les suites.

Il permet de faire très rapidement le lien entre la fonction exponentielle et les suites géométriques, au travers de modélisations discrètes et continues de situations concrètes.

Correction : les méthodes utilisées dans chacun des trois sujets sont identiques : une correction en classe entière est donc possible en un temps raisonnable, en donnant à chacun une correction détaillée des calculs correspondant à son sujet, mais en reprenant avec l'ensemble de la classe les méthodes adaptées à chaque question.

Sujet 1 : évolution de population

Tous les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} près

Partie A : modélisation discrète

Dans un laboratoire, on observe de développement d'une population de bactéries dans un milieu nutritif. Au début de l'expérimentation, on a placé 1000 bactéries. Afin de ne pas perturber leur développement, on minimise le nombre de manipulations en ne les comptant qu'une fois toutes les 24h. On observe que la population augmente de 61,6% par jour. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n le nombre de bactéries au bout de n jours.

1) Donner u_0. Déterminer la valeur de u_1, de u_2.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

3) Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire le nombre de bactéries qu'on observerait au bout de 10 jours.

5) Déterminer, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien de jours l'effectif de la population aura été multiplié par 200.

Partie B : modélisation continue

Les chercheurs ayant besoin de pouvoir faire des projections plus précises, en particulier sur les premières heures, ils décident de modéliser l'évolution de la population à l'aide d'une fonction. En notant t le temps écoulé depuis le début de l'expérience, exprimé en heures, ils estiment que l'effectif de la population de bactéries a une croissance exponentielle, c'est-à-dire qu'elle s'exprime par une fonction définie pour tout $t \geq 0$ par $f(t) = Ae^{kt}$, où A et k sont des constantes.

1) Déterminer la valeur de A.

2) Expliquer pourquoi $k = 0{,}02$ semble être une bonne approximation pour k.

3) En déduire l'effectif de la population au bout d'1h, et au bout de 12h.

Partie C : comparaison des deux modélisations.

On considère que la modélisation continue utilisée est valable si l'écart de valeur entre les deux modélisations est inférieur à 10 unités. Déterminer au bout de combien de jours l'approximation choisie dans la partie B n'est plus valable. Expliquer la démarche mise en œuvre.

Sujet 2 : acoustique

Tous les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} près

Un promoteur immobilier a racheté un local d'usine désaffectée, et souhaite le réhabiliter en logements. Ce local étant proche d'une ligne de chemins de fer, il doit renforcer l'isolation phonique d'une façade. Deux entreprises lui font des propositions qui lui semblent intéressantes, il souhaite les comparer.

Entreprise A : Elle propose des plaques isolantes de 12mm d'épaisseur, chaque plaque atténue l'intensité sonore de 8%. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note d_n la proportion de l'intensité sonore restante après la superposition de n plaques.

1) Donner la valeur de d_0. Calculer les valeurs de d_1 et de d_2.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?

3) Déterminer l'expression de d_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Quelle proportion de l'intensité sonore initiale reste-t-il avec 6cm de plaques isolantes ?

5) Déterminer, à l'aide d'un algorithme, le nombre de plaques nécessaires pour que l'intensité sonore initiale soit divisée par 5.

Entreprise B : Elle propose un isolant monobloc, qu'elle peut couper à l'épaisseur souhaitée. En notant x l'épaisseur du bloc en mm, la proportion de l'intensité sonore restante à la sortie du bloc s'exprime par la fonction c définie, pour tout $x \geq 0$, par $c(x) = Ae^{-kx}$, où A et k sont des constantes.

1) Déterminer la valeur de A.

2) Avec 5cm de bloc isolant, on obtient une isolation équivalente à celle fournie par l'entreprise A avec 7,2cm de plaques superposées. Expliquer pourquoi 0,01 est une approximation satisfaisante pour k.

3) En déduire la proportion de l'intensité sonore restante avec un bloc de 15 cm d'épaisseur.

Comparatif des deux offres : Pour 1m² de surface à couvrir, l'entreprise A facture ses plaques 2€ l'unité, tandis que l'entreprise B facture 25 centimes le millimètre d'épaisseur.

Déterminer le tarif le plus avantageux si le promoteur souhaite une diminution de 50% de l'intensité sonore, et s'il souhaite une diminution de 80% Expliquer la démarche mise en œuvre.

Sujet 3 : placement avec intérêts composés

Tous les résultats seront donnés arrondis au centime près.

Le 1er janvier 2018, Angéline souhaite placer sur un compte en banque la somme de 7000€. Elle étudie les propositions de deux banques, l'une en agence, l'autre en ligne.

Banque en agence : Elle propose un livret avec un taux d'intérêts de 1,25%, crédités le 1er janvier de chaque année. Elle peut retirer le capital total présent sur son compte à tout moment, sans frais.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, c_n le montant du capital sur le compte, exprimé en euros, le 1er janvier de l'année $2018 + n$, après versement des intérêts.

1) Donner la valeur de c_0. Calculer les valeurs de c_1 et de c_2.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer c_{n+1} en fonction de c_n. Quelle est la nature de la suite (c_n) ?

3) Déterminer l'expression de c_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Quel est le montant du capital sur le compte le 1er janvier 2026 ?

5) Déterminer, à l'aide d'un algorithme, en quelle année le capital dépassera 8000€.

Banque en ligne : Elle propose un livret dont le capital augmente le 1er de chaque mois. Le capital, exprimé en euros, disponible sur le compte s'exprime par la fonction f définie, pour tout $x \geq 0$, par $f(x) = Ae^{kx}$, où A et k sont des constantes, et x le nombre de mois écoulés depuis le début du placement. Angéline peut retirer le capital total présent sur son compte à tout moment, mais cela lui coûtera 50€. Cette banque affirme que son offre est tout de même plus intéressante que celle de la banque en agence.

1) Déterminer la valeur de A.

2) Le 1er septembre 2019, Angéline disposerait de 7150€ sur ce compte. Expliquer pourquoi $1{,}06 \times 10^{-3}$ est une approximation satisfaisante pour k.

3) Déterminer à quelle date le capital présent sur le compte dépassera 8000€. Expliquer la démarche mise en œuvre.

Comparatif des deux offres :

1) Déterminer le capital disponible sur le livret de la banque en ligne le 1er janvier 2029. Si Angéline souhaitait retirer son capital à cette date, serait-ce plus intéressant que le livret de la banque en agence ?
2) Au 1er janvier de quelle année le livret de la banque en ligne deviendrait-il le plus avantageux ? Expliquer la démarche mise en œuvre.