Académie de Lyon

TraAM 2014-2015 :

Développer avec les TICE l'appétence des élèves pour la résolution de problèmes en mathématiques

Séquence
Les clochettes de Galilée

Une étude du mouvement uniformément accéléré à partir de l'expérience de Galilée

Groupe académique

Dominique Bernard
Jean-Louis Bonnafet
Daniel Di Fazio
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

1. Présentation de l'activité

Thème

Etude mathématique du mouvement uniformément accéléré, un point de vue historique.

Niveau

Seconde – Première

Compétences mises en œuvre

Cette activité permet de mobiliser toutes les compétences listées dans le document "Les compétences mathématiques au Lycée", à savoir :
chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer.

2. Objectifs de l'activité

L'objectif de cette séquence est d'aider les élèves à modéliser, à l'aide de formules mathématiques, le déplacement d'une bille le long d'un plan incliné.

Pour cela les élèves sont amenés à reproduire l'expérience qui a permis à Galilée de trouver le lien existant entre distance parcourue et temps écoulé.

Le point de départ est une vidéo présentant la démarche de Galilée : la chute libre de boules du haut d'un clocher étant trop rapide pour pouvoir être analysée en détails, il utilise un plan incliné pour ralentir leur chute et des clochettes pour mesurer le temps.
A partir de données numériques de distances et de temps, obtenues par expérimentation, les élèves doivent retrouver que la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps écoulé.

3. Scénario de la séance

Matériel nécessaire

Vidéo sur « France TV éducation »
http://education.francetv.fr/physique-chimie/terminale/video/galilee-l-experience-des-plans-inclines

Logiciel « Cinderella » (logiciel géométrie dynamique permettant de créer des laboratoires de physique virtuels).
http://cinderella.de/tiki-index.php

Lancement de la séance (Classe entière)

- Vidéo (de 0'00 à 0'31).
Reprendre la phrase de la vidéo :
« La bille subit la même contrainte que lâchée à la verticale ».
En d'autres termes : modéliser ce mouvement uniformément accéléré peut aider à la modélisation la chute verticale d'un solide (qui est un mouvement uniformément accéléré).
On peut faire l'expérience avec le rail (capteur à 1 m)

- Vidéo (de 0'31 à 1'31).
« Contre toute attente, il s'aperçoit que les tintements ne suivent pas un rythme régulier. »
Demander aux élèves quelle est la conséquence de cette observation ?
(Réponse attendue : la distance parcourue n'est pas proportionnelle au temps)
On peut faire l'expérience avec le rail (capteur à 0,5 m puis à 1 m) et constater que le temps n'est pas doublé.

- Question

« Sans chronomètre, comment faire pour modéliser ce mouvement uniformément accéléré ? »

Discussion avec la classe (sous forme d'un brainstorming) pour lister différentes propositions.

- Vidéo (de 1'31 à 1'54).

Jusqu'à « Galilée s'aperçoit que les intervalles ont une progression très précise. »

- Consigne

« Cela va être à vous de retrouver quelle est cette progression, une fois que cela sera fait, essayez d'en déduire la relation existant entre le temps écoulé et la distance parcourue. Comme on n'a pas une goulotte pour chaque groupe, on va utiliser un logiciel permettant de simuler la manipulation. »

- Présentation collective du fichier sur Cinderella (au vidéoprojecteur)

Bien expliquer qu'il faut cliquer sur le carré de RAZ avant de déplacer les clochettes.

Temps de recherche (en groupes)

- Consigne

On invite les élèves (qui se mettent en groupe) à utiliser le fichier (installé sur ordinateur) pour faire la simulation.
Répondre à la question :

« Comment placer les clochettes sur le plan incliné pour quelles sonnent à intervalle régulier ? »

On demande aux élèves de rédiger une phrase de conclusion expliquant comment placer les points.
Ceci afin de les amener à « verbaliser » et à prendre conscience de ce qui a été fait.

- Pour poursuivre (pour les plus rapides) on peut :

Chercher l'expression fonctionnelle :

« Essayer de déterminer l'expression d'une fonction exprimant la relation existant entre le temps écoulé et la distance parcourue ».

Changer la pente du plan incliné

« Observer et décrire l'effet sur le mouvement de la bille lorsque l'on change la pente du plan incliné ».

Institutionnalisation

- On fait le point sur l'état d'avancement des travaux dans les différents groupes

- Vidéo (de 1'54 à la fin)

La fin de la vidéo donne la réponse : les écarts sont comme la suite 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 etc.
En d'autre terme si on multiplie par 4 la hauteur, le temps de parcours est seulement multiplié par 2.
On peut faire l'expérience avec le rail (capteur à 0,25 m puis à 1 m) et observer que le temps est doublé.

Aide éventuelle à l'utilisation des logiciels (à fournir en cas de besoin)

Tracé d'une courbe de tendance sur tableur :

Excel :
Tracer le nuage de points, puis le sélectionner et demander « Ajouter une courbe de tendance » (cocher « Afficher l'équation sur le graphique »)

LibreOffice
Tracer le nuage de points (Diagramme « XY dispersion »), puis le sélectionner et demander « Insérer une courbe de tendance » (cocher « Afficher l'équation »)

Tracé d'une courbe de tendance sur Géogébra

Utilisation possible des instructions :

AjustPoly[<Liste Points>,<Degré>] qui calcule une régression polynomiale de degré *n*.

AjustPuissance[<Liste Points>] Recherche une courbe de régression sous la forme $a\,x^b$.

Ces commandes fonctionnent à l'identique dans la fenêtre Calcul formel

4. Quelques précisions sur les choix effectués

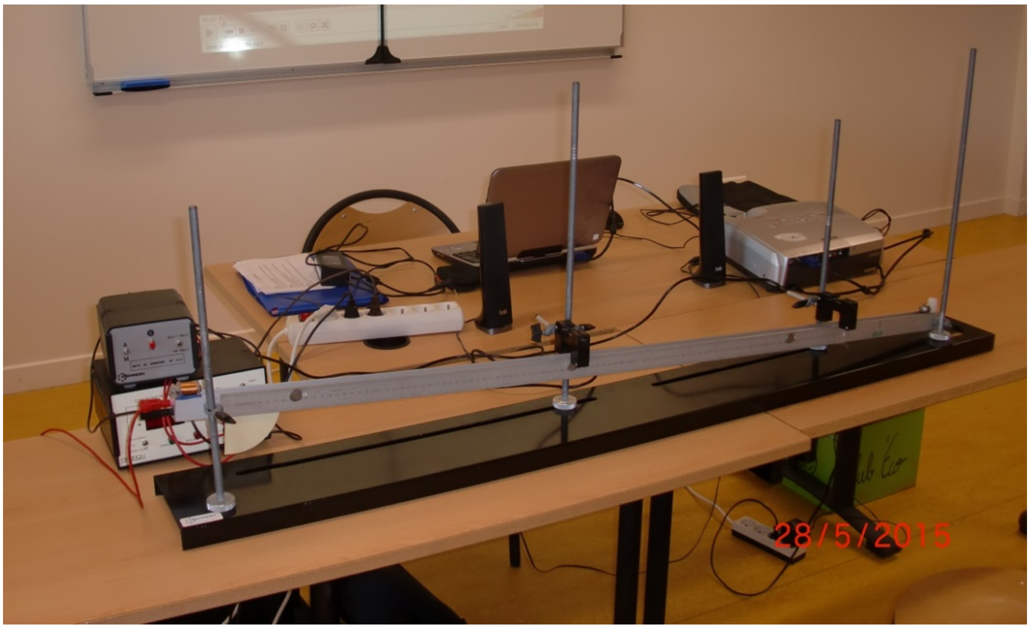
A l'issue de la séance, chaque groupe d'élèves a eu pour consigne de rendre un compte-rendu de son TP.
Celui-ci doit décrire les différentes démarches mises en place et doit donner les réponses aux différentes questions qui ont pu être traitée.
L'objectif étant que le temps de recherche des élèves soit limité au temps de la séance en classe (un peu comme pour les TP de physique ou de SVT.)
Afin de finaliser la rédaction de leur compte-rendu, les groupes avaient éventuellement jusqu'au lendemain pour le rendre.

Pour éviter que les sons de clochettes ne perturbent la quiétude de la classe, il est recommandé de demander aux élèves d'utiliser des écouteurs. Si la salle n'en est pas équipée il suffit de demander aux élèves d'utiliser ceux de leur Smartphone (ils en sont pour la plupart équipés).

Sur le fichier « Ciderella » fourni, les élèves disposent de 7 clochettes (et non pas 5 comme Galilée) ce choix a été fait pour des raisons d'esthétique musicale. Il est plus agréable à l'oreille d'avoir une note différente par clochette et dans ces conditions, il vaut mieux jouer toutes les notes de la gamme pour ne pas avoir une impression d'inachevé. Mais il a bien été précisé aux élèves qu'ils n'étaient pas obligés d'utiliser toute les clochettes pour émettre leurs conjectures.
D'autre part, quand on lance l'animation, un tableau affiche des valeurs numériques de distances et de temps.
Ce tableau à été placé pour simplifier la tâche des élèves.
Après expérimentation, ce choix s'avère discutable, car il favorise une approche « fonctionnelle » de la situation et n'incite pas les élèves à travailler sur les écarts de distances.

5. Mise en œuvre en classe (en première S)

Présentation du matériel



Mise en évidence de la problématique à l'aide de la vidéo.
Cette vidéo évoque le problème de la mesure du temps (clepsydre). Des clochettes, disposées à égale distance le long du parcours d'une bille tintent sur le passage de cette bille (1'25).

Conjecture : que peut-on dire du tintement des clochettes ?

Contre toute attente, les tintements ne suivent pas un rythme régulier. Les élèves sont assez vite convaincus que les clochettes vont tinter de plus en plus vite.

Réglons les clochettes pour qu'elles sonnent à intervalle régulier.

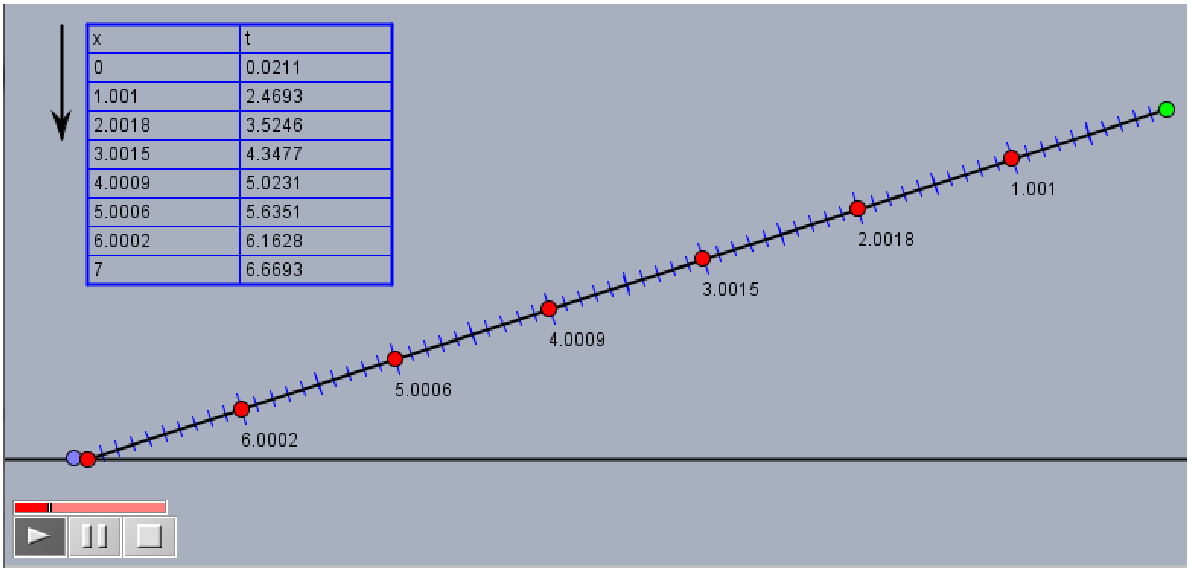
Pour cela, déplaçons-les le long de la rainure du plan incliné
En mesurant les distances qui séparent les clochettes Galilée s’aperçoit que les intervalles ont une progression très précise (1’55).

Découverte du fichier de simulation.

Initialement le fichier présente des clochettes (points rouges) réparties de façon régulière.

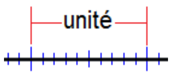
La « commande  en bas à gauche de l’écran permet de lancer ou d’initialiser la simulation.

Une rapide mise en garde sur les effets de cette commande est faite par le professeur pour que les élèves ne soient pas gênés par des disfonctionnements éventuels.



x	t
0	0.0211
1.001	2.4693
2.0018	3.5246
3.0015	4.3477
4.0009	5.0231
5.0006	5.6351
6.0002	6.1628
7	6.6693

Les élèves font plusieurs essais et se lancent tout de suite dans le déplacement des clochettes pour répondre à la question posée.

Ils s’interrogent sur l’apparition du tableau. Le lien entre la colonne des *x* du tableau et la valeur numérique sous chaque clochette est rapidement fait et compris : il s’agit du repérage de la clochette sur l’axe gradué d’origine le point vert et d’unité 

A priori L’excès de précision ne gêne pas. La colonne *t* est associée à l’écart de temps entre deux tintements.

Procédures des élèves

Une procédure « au hasard »

Poser les clochettes sur la rampe sans stratégie particulière puis effectuer un test.

Tout d'abord nous avons placé les points au hasard sur l'axe en essayant d'espacé de plus en plus du précédent

Les élèves écoutent les tintements

Une procédure « clochette à clochette »

Des résultats consignés sur papier[1]

Placer la première clochette puis disposer les suivantes une à une par rapport à cette première clochette.
Un test sur le temps est fait pratiquement à chaque étape.

… nous avons commencé par la clochette située le plus près possible du lancé de la bille ; sachant que le début du son indiquait 0,00 de secondes nous avons décidé de faire sonner la deuxième au 10 centième secondes. Pour se faire nous avons du déplacer mainte fois la clochette pour avoir un chiffre rond au centième. Nous avons répercuté cette méthode un peu hasardeuse pour placer les autres clochettes.

Une procédure « suite de clochettes »

Avec la calculatrice

Placer la première clochette puis utiliser une règle « logique » pour les autres positions. En fait c'est la construction d'une suite, qui nécessite parfois l'utilisation de la calculatrice (tableau de valeurs).

Nous avons d'abord essayé que la distance entre les clochettes soit multipliée par un nombre x en fonction de la distance précédente ($u_{n+1} = x \times u_n$).

<u>Remarques :</u>

- *Pour la « validation », par exemple pour la démarche au hasard, c'est souvent le temps qui est pris en compte, c'est aussi le temps qui est pris pour mener les modifications appropriées. Ce qui est normal de par le fait que l'on veut un tintement régulier (temps).*
  Par contre la position des clochettes sur l'axe n'est pas systématiquement évoquée, donc dans le tableau l'observation des x est parfois secondaire.
  On a constaté que les élèves qui procèdent ainsi réussissent à obtenir cependant un résultat intéressant.
- *La validation s'appuie sur la lecture numérique des résultats. L'excès de décimale n'a pas déconcerté les élèves et n'a pas nui à la pertinence de la validation. Ils se sont rendu compte que c'était expérimental et que, pour valider, seules les premières décimales étaient importantes (le professeur a insisté sur ce fait).*
  Ainsi quand les élèves observaient qu'en additionnant par exemple 0,95 au temps on passait d'une valeur temps au la valeur suivante, le problème était résolu. De là ils oubliaient la vraie question du problème : les écarts entre les x. Ici l'afflux de décimales ne permet pas de repérer la « règle ».

Nous avons essayé de partager les 7 portions de temps entre les huit points de façon égale. L'intervalle de temps entre chaque point devrait être égal à : $\frac{t_f - t_i}{7} = \frac{6,67 - 0,02}{7} \approx 0,95$.

- *Ceux qui utilisent la procédure « clochette à clochette » sont tributaires de la pose de la première clochette. Ainsi s'ils arrivent à en poser 2 voire 3 clochettes, ils rencontrent des difficultés quand il s'agit de placer les autres : « il n'y a pas assez de place : il faut tout recommencer ! ». En général ils ne tirent aucune information sur la résolution partielle du problème (c'est à dire avec des clochettes déjà bien posées) car pour eux le problème n'est globalement pas résolu.*
  Le professeur a rappelé à ce propos le travail : « comment placer les clochettes de façons à ce que le tintement soit régulier ; il ne s'agit pas de placer toute les clochettes mais de trouver une façon de faire ».
  Les élèves repartent cette fois ci avec la même procédure sans essayer de tout placer.
- *Ceux qui partent sur la procédure « suite de clochettes », et par là veulent appliquer une règle qui donne l'écart entre deux clochettes consécutives de façon rationnelle, font pour valider cette « conjecture » un test comme expliqué plus haut. Si le placement des clochettes est invalidé, des échanges ont lieu sur les adaptations à apporter à la règle mise en place pour résoudre le problème.*

1Le professeur a demandé une sorte de narration de recherche

Nous avons d'abord essayé que la distance entre les clochettes soit multipliée par un nombre x en fonction de la distance précédente ($u_{n+1} = x \times u_n$).
Nous avons fait avec x=2 et x=3, ça ne marchait pas.

Dans certains échanges, on a pu entendre des élèves parler de suites ; la réflexion engagée est souvent tributaire des suites étudiées en cours (arithmétiques/géométriques).

Nous avons essayé de positionner les clochettes de façon à ce que le temps soit toujours le même.
$t_{n+1} = t_n + t_1$ (t_0 est le 1er temps).
Cela fonctionne avec $t_1 = 0,12$.
Nous avons donc $r = t_{n+1} - t_n = 0,12$
$t_n = 0,12n$
Conclusion : Pour que le temps entre les clochettes soit régulier, il faut suivre une suite arithmétique.

- *Les procédures mises en œuvre dans la résolution du problème ne sont pas exclusives les unes des autres : en général on note une sorte de convergence vers la procédure au hasard.*
- *On a constaté que les élèves ont trouvé assez « facilement » la position de plusieurs clochettes sans pour autant les caractériser. Nous n'avons pas eu besoin d'évoquer l'idée qui consistait à simplifier le problème en éliminant la condition « tintement régulier »*

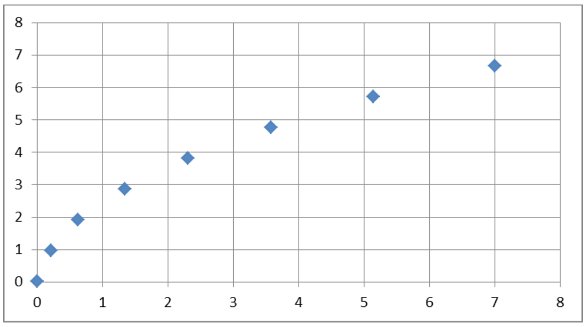
De fait tous les élèves avaient un tableau par exemple de la forme :

x	***t***
0	0,0211
0,2079	0,9708
0,6236	1,9206
1,3424	2,8703
2,3106	3,8201
3,5817	4,7698
5,1467	5,7196
7	6,6693

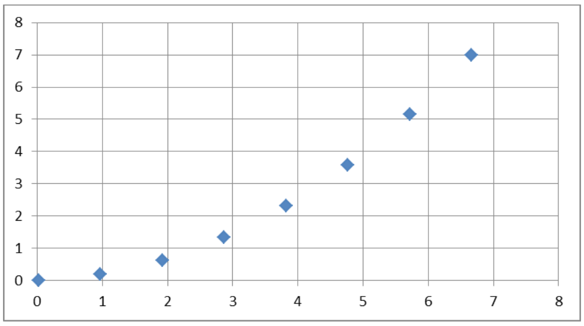
Des valeurs vers la courbes

A partir d'un tableau, le professeur demande aux élèves ce que l'on peut en faire.

L'utilisation d'un tableur pour la construction rapide d'un du nuage de points et adoptée.
Après saisie en général on obtient :



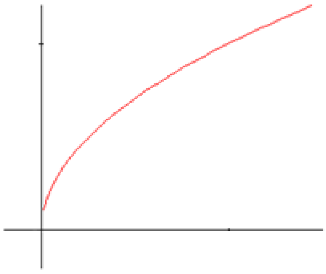
Nuage 1



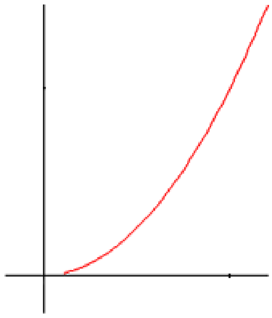
Nuage 2

Les nuages de points sont difficilement intelligibles pour les élèves, il faut construire une courbe passant par ces points.
Le nuage 1 donne une expression de la forme $t = k\times$ et le nuage 2 donne une expression de la forme $x = g\times t^2$.

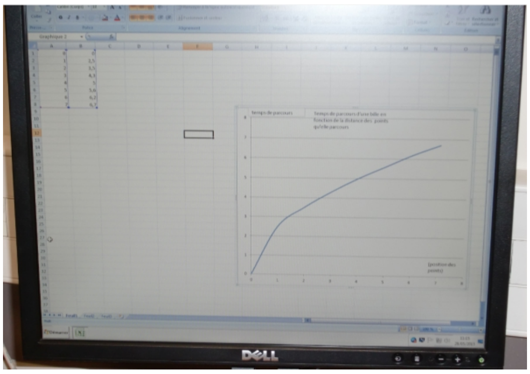
Dans un premier temps, il n'est pas question de demander aux élèves une réponse de cette nature, mais simplement de reconnaître la nature de la courbe.



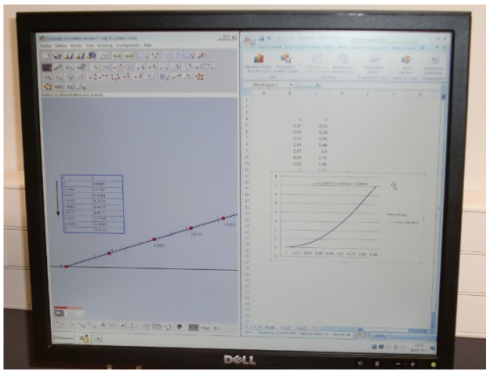
Courbe 1



Courbe 2



Réponse élève n°1

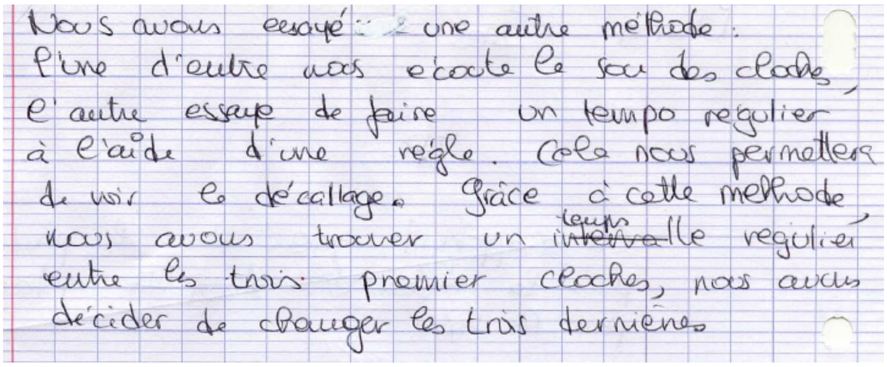


Réponse élève n°2

6. Retour d'expérience

Chaque groupe d'élèves avait pour consigne, à l'issue de la séance, de rédiger un compte-rendu de TP. Ce compte-rendu devait être rédigé sous forme d'une « narration de recherche » afin de retracer leurs différentes hypothèses et de décrire leurs différentes démarches. Il devait aussi être accompagné l'envoi au professeur de tous les fichiers nécessaires (fichier cinderella obtenu, fichiers tableur construits, …)

Ces comptes rendus montrent que, dans certains cas, les élèves ont utilisé des méthodes similaires à leurs illustres ancêtres :

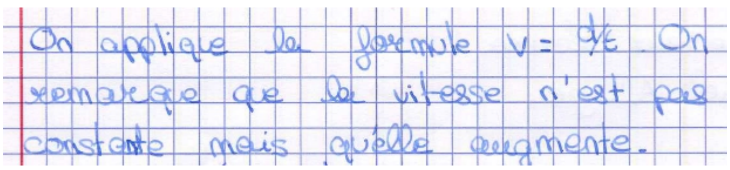


Nous avons essayé une autre méthode.
L'une d'entre nous écoute le son des cloches,
l'autre essaye de faire un tempo regulier
à l'aide d'une règle. Cela nous permettera
de voir le décallage. Grâce à cette méthode
nous avons trouver un ~~intervalle~~ temps regulier
entre les trois premier cloches, nous avons
décider de changer les trois dernières

Or, la légende veut, qu'en l'absence d'instruments précis de mesure du temps, Galilée aurait utilisé dans ses premières investigations différentes méthodes pour mesurer le temps :

- *le chant (hypothèse liée à la formation musicale de Galilée),*
- *son pouls (idée empruntée à Jérôme Cardan),*
- *le pendule oscillant.*

Parfois il est fait référence à des formules connues …



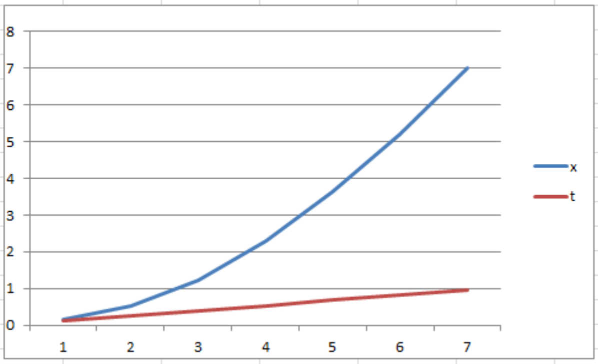
On applique la formule $v = d/t$. On
remarque que la vitesse n'est pas
constante mais qu'elle augmente.

… sans toutefois donner des résultats satisfaisants.

Beaucoup de groupes ont tenté de représenter graphiquement les données obtenues.
Durant la séance, la plupart d'entre eux ne sont pas allés au-delà de la construction d'un nuage de point et de la recherche d'une fonction correspondant à ce nuage.

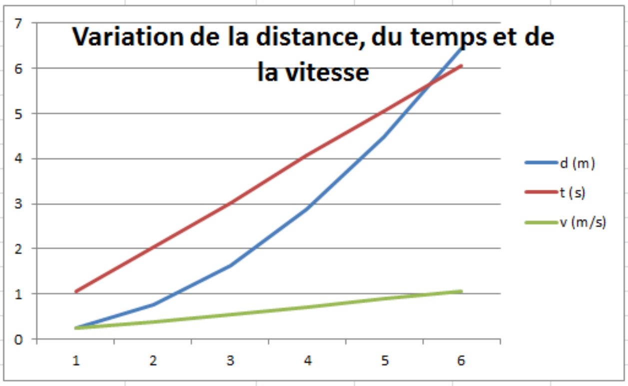
Dans certains cas, les élèves ne savent pas trop ce qu'ils veulent représenter comme ci-contre, ou le groupe à superposé deux graphiques, l'un correspondant aux valeurs de *x* et l'autre aux valeurs de *t*.

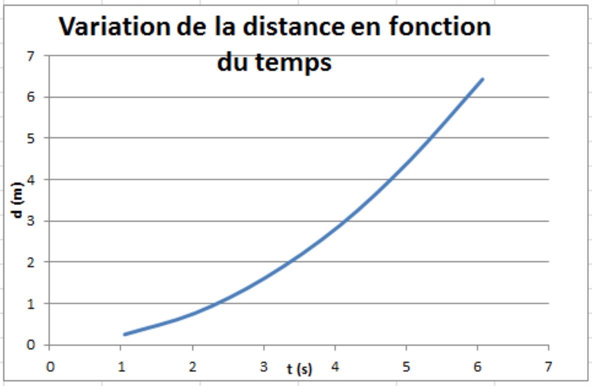
	A	B	C	D	E
1	x	t		x	t
2	0,23	0,16		0,17	0,12
3	0,72	0,3		0,54	0,26
4	1,49	0,44		1,23	0,4
5	2,47	0,56		2,28	0,54
6	3,71	0,69		3,62	0,68
7	5,21	0,83		5,21	0,82
8	7	0,96		7	0,96

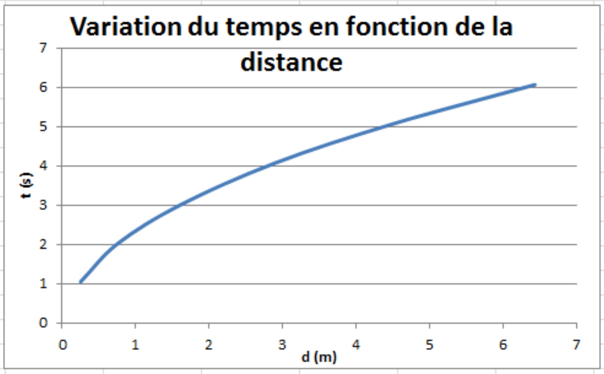


Dans d'autre cas, les élèves ont tenté de multiplier les représentations :

	A	B	C
1	d (m)	t (s)	v (m/s)
2	0,25	1,05	0,23809524
3	0,76	2,03	0,37438424
4	1,62	3,02	0,53642384
5	2,89	4,07	0,71007371
6	4,48	5,06	0,88537549
7	6,43	6,07	1,05930807







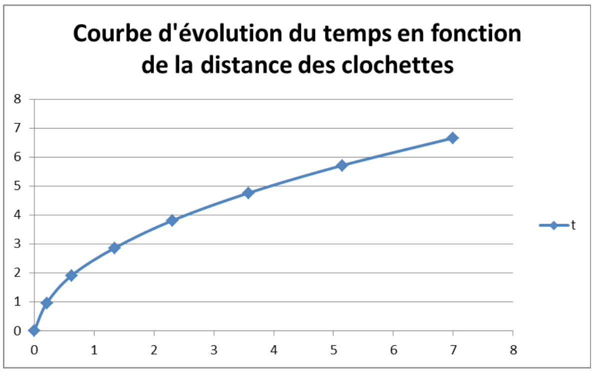
Ce qui permet souvent d'avoir une piste de recherche grâce à la reconnaissance de l'allure de la courbe obtenue :

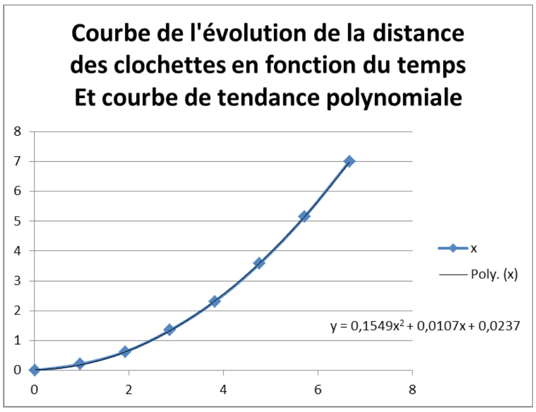
A l'aide du tableur, nous avons réalisé des graphiques.
Une des courbes ressemblait à une para_bole donc un polynome du 2° degré.
Nous avons changé x par t car t est en abssice alors l'équation est $y = ax^2+bx+c$.
$x = at^2+bt+c$

Pour certains groupes, la réflexion est plus évoluée.
Les élèves ont commencé par représenter *t* en fonction de *x*, avant de décider d'effectuer une permutation des deux variables.

> Nous l'avons entré sur excel, et avons fait un graphique avec la distance x en abscisse et le temps t en ordonnée. Voyant qu'aucune courbe de tendance ne correspondait à celle que nous avions, nous avons décidé d'inverser l'abscisse et l'ordonnée.

Pour ensuite ajouter une courbe de tendance.





> La courbe de la distance en fonction du temps se révéla être la représentation d'une fonction polynomiale du second degré d'équation : $x = 0{,}154t^2 + 0{,}010t + 0{,}023$

Quelques groupes arrivent à obtenir un résultat proche de celui attendu.

> Les deux courbes que nous avons obtenus ressemblent à près à des demi parabole. On peut donc conjecturer qu'il faut à chaque fois déterminer la valeur au carré de t pour avoir une proportionnalité avec la distance (fonction linéaire).

7. Conclusion

Comme cela à déjà été dit, la plupart des groupes ont travaillé sur des nuages de points pour trouver une relation liant le temps et la distance.
Aucun groupe n'a cherché à étudier les distances séparant deux clochettes respectives (comme l'a fait Galilée).
C'est certainement dû à la présence du tableau donnant les valeurs de x et t dans le fichier fourni.
Peut-être est-il pertinent de supprimer ce tableau.

Par contre c'est une activité dans laquelle les élèves se sont beaucoup impliqués.
L'approche historique et la présence de matériel permettant d'expérimenter y sont sûrement pour beaucoup.