Une marche aléatoire sur un graphe probabiliste

Un plongeur effectue, au cours d'une séance d'entraînement, deux type de sauts. Le saut sur le plongeoir 1 est réussi avec une probabilité égale à 2/3 et le saut sur le plongeoir 2 avec une probabilité égale à 1/4.
Le sportif décide d'organiser sa séance de la manière suivante :

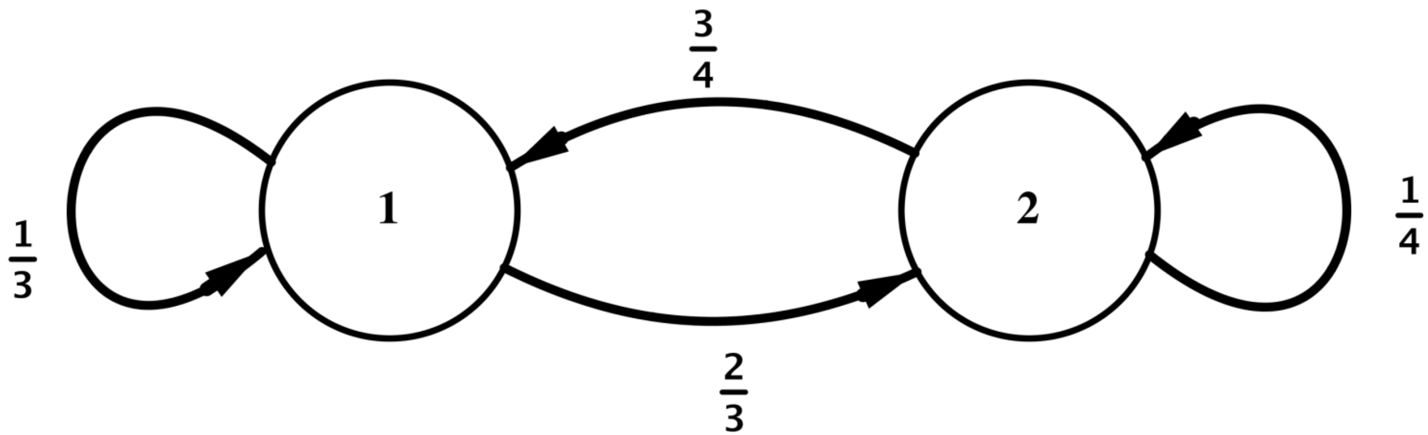
- Le premier plongeoir est choisi de manière aléatoire ;
- A l'issue de chaque saut, le plongeur :
    - monte sur le plongeoir 1 si le saut vient d'être raté
    - monte sur le plongeoir 2 si le saut vient d'être réussi.

On suppose que les probabilités de réussir un saut restent constantes dans le temps et qu'elles ne dépendent ainsi ni du nombre de sauts déjà effectués, ni du saut qui vient d'être tenté.

1) Quelle est la probabilité que le sportif soit sur le plongeoir 1 …

a. … à l'issue de son 2ème saut ?

b. … à l'issue de son 3ème saut ?



$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$: matrice de transition

$P_{i,j}$: probabilité pour le sportif de se déplacer vers le plongeoir j sachant qu'il se trouve sur le plongeoir i.

A_i : « Le plongeur se trouve sur le plongeoir 1 à l'issue de son i-ème saut » ;

B_i : « Le plongeur se trouve sur le plongeoir 2 à l'issue de son i-ème saut » ;

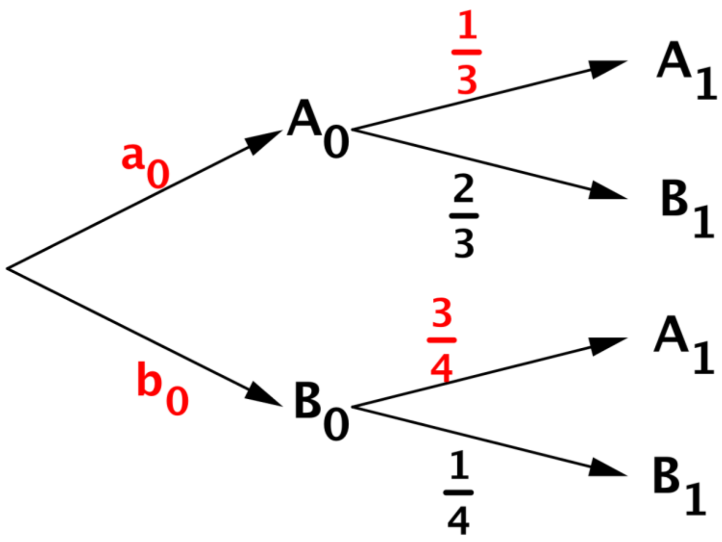
A_0 : « Le plongeur se trouve sur le plongeoir 1 pour débuter sa séance » ;

B_0 : « Le plongeur se trouve sur le plongeoir 2 pour débuter sa séance » ;

On notera :

$a_i = P(A_i)$; $b_i = P(B_i)$ et $E_i = (a_i, b_i)$

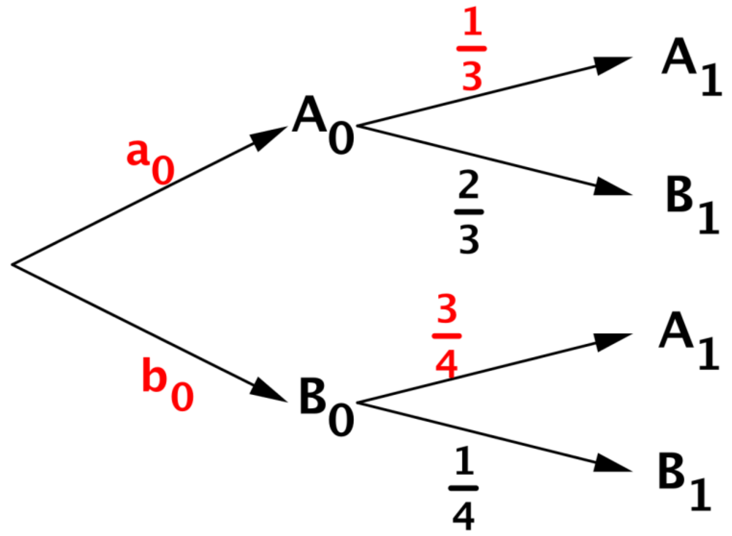
Calcul de $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1})$



Formule des probabilités totales :

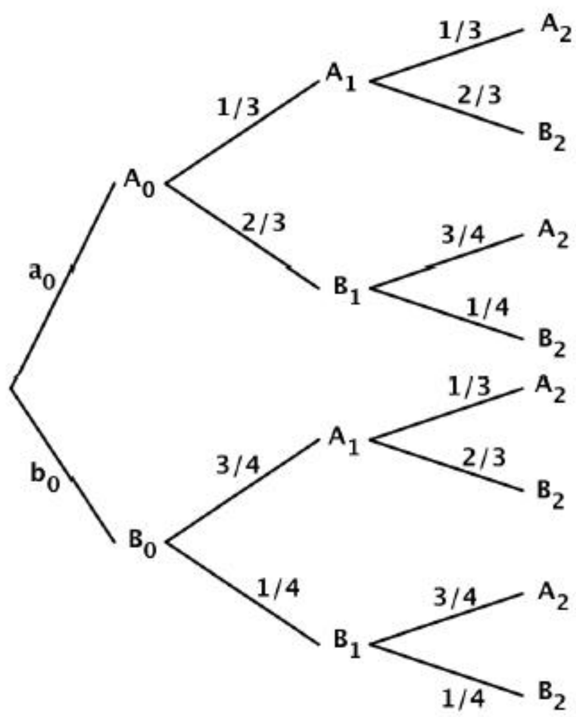
$$P(A_1) = P(A_1|A_0)P(A_0) + P(A_1|B_0)P(B_0)$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \times a_0 + \frac{3}{4} b_0$$



$$(a_1, b_1) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Calcul de $(\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{b_2})$



$$a_2 = P(A_2) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right) a_0 + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) b_0$$

$$(a_2, b_2) = (a_1, b_1) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ et } (a_1, b_1) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = P(A_2) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right) a_0 + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) b_0$$

$$b_2 = P(B_2) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}\right) a_0 + \left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) b_0$$

$$a_2 = \frac{11}{18} a_0 + \frac{7}{16} b_0 \text{ et } b_2 = \frac{7}{18} a_0 + \frac{9}{16} b_0$$

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}$$

… Que représente P^2 ?

Calcul de $(\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{b_3})$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 11/18 & 7/18 \\ 7/16 & 9/16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 107/216 & 109/216 \\ 109/192 & 83/192 \end{pmatrix}$$

2 P

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}, & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}, & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

M

3 P^2

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{18}, & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{16}, & \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

M

4 P^3

$$\begin{bmatrix} \frac{107}{216}, & \frac{109}{216} \\ \frac{109}{192}, & \frac{83}{192} \end{bmatrix}$$

M

5

2) On pose : $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$

a. Vérifier que : $P = Q - \frac{5}{12} R$

où $Q = \begin{pmatrix} 9/17 & 8/17 \\ 9/17 & 8/17 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 8/17 & -8/17 \\ -9/17 & 9/17 \end{pmatrix}$

b. Vérifier que : $Q \times R = R \times Q = 0$;

c. Vérifier que : $Q^n = Q^2 = Q$, puis que $R^n = R^2 = R$ $(n \geq 0)$

d. Justifier que : $P^n = Q + (-5/12)^n R$ ... que peut-on en déduire ?

3) Recherche état stable :

a. Vérifier que si on pose $X = (9/17 \quad 8/17)$ alors $X = XP$.

b. Justifier, grâce à la résolution d'un système, que cet état est le seul état stable.

La condition $X = XP$ se traduit par le système :

$$\begin{cases} 4x + 9y = 12x \\ 8x + 3y = 12y \end{cases}$$

Après combinaison, on n'obtient qu'une équation : $9y = 8x$

On complète avec la condition : $x + y = 1$

On obtient bien $(9/17 \quad 8/17)$ comme unique solution.

4) le plongeur (que l'on appellera A) est maintenant rejoint par un autre plongeur (B).

Les probabilités de réussites sur les deux plongeoirs sont données respectivement par les deux matrices :

$$P_A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \text{ et } P_B = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Les plongeurs décident de réaliser une série de 2 plongeons en enchaînant chacun un saut et en conservant les règles choisies.

Le choix du premier plongeur est-il important pour le calcul des probabilités décrivant l'état du système (plongeur A ou B) à l'issue des deux sauts ?

Si le plongeur A débute la série :

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 7/12 & 5/12 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

Si le plongeur B débute la série :

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(a_2, b_2) = (a_0, b_0) \times \begin{pmatrix} 31/48 & 7/16 \\ 17/48 & 9/16 \end{pmatrix}$$

On observe que :

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$