<u>Activités proposées :</u>

<u>Activité 1 : Propagation de maladies et modèle S.I.R</u>

Dans une population, un individu est susceptible de contracter une certaine maladie.
Il peut être dans l'un des trois états :

- S : susceptible : il peut tomber malade ;
- I : infecté : il a la maladie ;
- R : retiré : il est immunisé.

Ces états sont temporaires : l'individu peut changer d'état. On supposera, dans notre modèle, que son état peut changer tous les mois selon les règles suivantes :

- S'il est dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité égale à 0,6, passer à l'état I avec une probabilité égale à 0,3, ou encore passer à l'état R avec une probabilité avec une probabilité égale à 0,1.
- S'il est dans l'état I, il peut le rester avec une probabilité égale à 0,05, ou passer à l'état R avec une probabilité égale à 0,95.
- S'il est dans l'état R, il peut le rester avec une probabilité égale à 0,9, ou passer à l'état S avec une probabilité égale à 0,1.

1. Si un individu est Susceptible aujourd'hui, dans quel état sera-t-il dans un mois ? Dans 4 mois ?
2. Que peut-on prévoir à long terme pour cet individu ?
3. On étudie les états d'une population de 20 millions d'habitants : quel nombre d'individus peut-on prévoir dans chaque état, après une longue période ?
4. On suppose que la population est constituée initialement d'individus susceptibles, écrire un algorithme puis un programme permettant de déterminer à partir de quel mois n, 75 % de la population sera dans un état Retiré.
5. Même question en supposant qu'initialement 2/3 de la population est dans un état susceptible et 1/3 de la population dans un état retiré.

Activité 2 : Urnes d'Ehrenfest avec N = 4

On considère deux urnes A et B dans lesquelles on retrouve $N = 4$ particules.

- On suppose qu'à l'instant initial, toutes les boules sont dans l'urne A.
- A intervalle régulier, une boule et une seule choisie au hasard parmi ces 4 boules change d'urne.

On effectue ainsi n tirages. On désigne par X_n le nombre de boules dans l'urne A à l'issue des n tirages.

1. Simulations à l'aide d'un logiciel de calcul formel
   a. Représenter la situation par un graphe probabiliste à 5 sommets.
   b. Ecrire la matrice de transition de graphe (on fera le choix d'écrire les états en ligne).
   c. Ecrire la formule permettant de calculer l'état du système (noté E_n).
   d. A l'aide Xcas, calculer E_2, E_3, E_5, puis donner des estimations de E_{35} et E_{40}.
2. Calculs sans calcul formel
   a. Montrer que si n est un entier naturel pair non nul alors :
   $$E_n = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2^{n+1}}, 0, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{8} + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
   b. Montrer que si n est un entier naturel impair non nul alors :
   $$E_n = \left(0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}, 0\right)$$
   c. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X, ainsi que leurs limites lorsque $n \to +\infty$.
3. Reprise de ces calculs avec le logiciel Xcas
   a. Calculer E_n.
   b. Calculer $E(X_n)$ en remarquant que si $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors $E(X_n) = E_n * V$.
   c. Rechercher l'état stable/stationnaire à l'aide de Xcas. Que retrouve-t-on comme loi de probabilité ?
4. Un autre état initial
   On suppose qu'au démarrage du processus, on choisit au hasard le nombre de boules dans l'urne A.
   a. Quel est l'état initial E_0 ?
   b. Calculer E_n pour n entier naturel.
   c. Calculer $E(X_n)$.
5. Un dernier état initial quelconque
   On suppose que $E_0 = (a, b, c, d, e)$ avec $a + b + c + d + e = 1$.
   Calculer à l'aide de Xcas $E(X_n)$ puis sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Activité 3 : Interpolation polynomiale

On se donne $n + 1$ points $M_i\ (x_i\ ;\ y_i)$ appartenant à la courbe représentative d'une fonction f.
On cherche un polynôme P de degré n dont la courbe représentative passe par ces $n + 1$ points.
On écriera : $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

1. Montrer que les $n + 1$ nombres (a_i) sont solution d'un système que l'on peut écrire sous forme matricielle.

2. Cas particulier : $n = 2$ et f est la fonction définie sur $[0\ ;1]$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   On choisit les abscisses uniformément réparties sur l'intervalle : $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 1$.
   a. Ecrire le système obtenu.
   b. Résoudre ce système à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
   c. Représenter la fonction et son polynôme d'interpolation.

3. Cas particulier : la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 1]$ et on choisit les abscisses uniformément réparties sur cet intervalle ($x_i = \frac{i}{n}$ pour $i = 0, \dots, n$)
   a. Programmer la création de la matrice associée.
   b. Résoudre le système à l'aide d'un calcul formel.
   c. Représenter les points et les deux courbes représentatives (la fonction initiale et le polynôme d'interpolation).