Evolution de la population de deux villes.

Objectifs :

- Utilisation calcul matriciel
- Utilisation de la puissance nième d’une matrice
- Utilisation xcas

Deux villes A et B totalisent une population d’un million d’habitants
Chaque année :

- 20% des habitants de la ville B déménagent pour aller s’installer dans la ville A ;
- 5% des habitants de la ville A déménagent pour aller s’installer dans la ville B.

On note A_0 et B_0 les populations des deux villes pour l’année $n = 0$ (en millions d’habitants) et on note A_n et B_n les populations après n années.

1) Ecrire deux relations de récurrence permettant de calculer A_{n+1} et B_{n+1} en fonction de A_n et B_n.

$$\begin{cases} A_{n+1} = 0{,}95A_n + 0{,}2B_n \\ B_{n+1} = 0{,}05A_n + 0{,}8B_n \end{cases}$$

2) Ecrire la relation de récurrence permettant de calculer $\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$

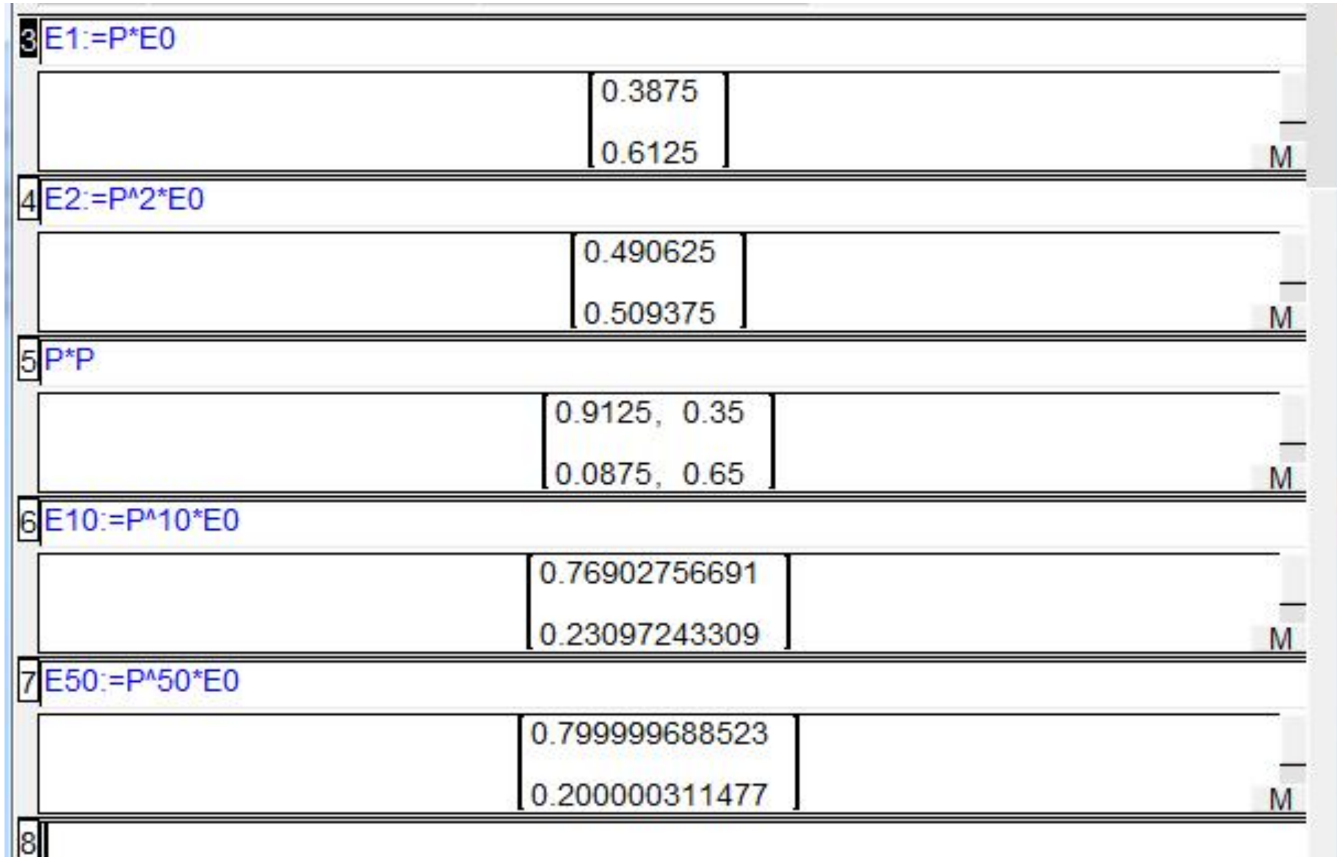
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}2 \\ 0{,}05 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix}$$

3) Calculer les populations des deux villes au bout de 1, 2, 5, 10, n années

a) En supposant que $A_0 = 0{,}25$ et $B_0 = 0{,}75$;

b) En supposant que $A_0 = 0{,}1$ et $B_0 = 0{,}9$;

c) En supposant que A_0 et B_0 quelconques et que $A_0 + B_0 = 1$.



4) Dans chacun des cas précédents quel est la limite des suites (A_n) et (B_n) lorsque $n \to +\infty$?

```
3 E1:=P*E0
  [0.2*(1 -a)+0.95*a ]
  [0.8*(1 -a)+0.05*a ]                                  M
4 E2:=P^2*E0
  [0.35*(1 -a)+0.9125*a]
  [0.65*(1 -a)+0.0875*a]                                M
5 P*P
  [0.9125,  0.35]
  [0.0875,  0.65]                                       M
6 E10:=P^10*E0
  [0.754949188232*(1 -a)+0.811262702942*a]
  [0.245050811768*(1 -a)+0.188737297058*a]              M
7 E50:=P^50*E0
  [0.799999546943*(1 -a)+0.800000113264*a]
  [0.200000453057*(1 -a)+0.199999886736*a]              M
8
```

3 E1:=P*E0

$$\begin{bmatrix} 0.75 \cdot a+0.2 \\ -0.75 \cdot a+0.8 \end{bmatrix}$$

M

4 E2:=P^2*E0

$$\begin{bmatrix} 0.5625 \cdot a+0.35 \\ -0.5625 \cdot a+0.65 \end{bmatrix}$$

M

5 P*P

$$\begin{bmatrix} 0.9125, & 0.35 \\ 0.0875, & 0.65 \end{bmatrix}$$

M

6 E10:=P^10*E0

$$\begin{bmatrix} 0.0563135147095 \cdot a+0.754949188232 \\ -0.0563135147095 \cdot a+0.245050811768 \end{bmatrix}$$

M

7 E50:=P^50*E0

$$\begin{bmatrix} 5.66321656015e-07 \cdot a+0.799999546943 \\ -5.66321656514e-07 \cdot a+0.200000453057 \end{bmatrix}$$

M

8

5) Ecrire un système qui permette de déterminer une répartition initiale des deux populations $\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ restant stable dans le temps. Résoudre ce système.

On recherche $X = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$ tel que $X = PX$: égalité qui traduit le système

$$\begin{cases} A_0 = 0{,}95A_0 + 0{,}2B_0 \\ B_0 = 0{,}05A_0 + 0{,}8B_0 \end{cases}$$

Soit : $0{,}05\ A_0 = 0{,}2\ B_0$

On rajoute : $A_0 + B_0 = 1$

```
8 resoudre_systeme_lineaire([0.05*a=0.2*b, a+b=1],[a,b])
  [0.8, 0.2]
```