

Des triangles à côtés entiers

Dans les programmes

Notions élémentaires sur le triangle (inégalité triangulaire, Pythagore). Logique : implication, équivalence. Boucles, instructions conditionnelles.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On appellera "triangle entier" les triangles à côtés entiers et "triplet représentant un triangle" le triplet des longueurs des côtés d'un triangle.

1 Triangles entiers

1. Écrire la partie traitement de l'algorithme suivant :

Entrée	un entier naturel n (non nul)
Sortie	Les triplets de la forme $(1; b; c)$ représentant un « triangle entier » où b et c sont inférieurs ou égaux à n

- (a) Émettre une conjecture à partir des résultats obtenus.
 - (b) Émettre une conjecture sur la parité du périmètre des triangles représentés par un triplet d'entiers de la forme $(1; b; c)$.
 - (c) Démontrer les conjectures faites.
2. Pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre p donné, écrire l'algorithme ci-dessous sur machine et l'utiliser pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre 13 et des triangles de périmètre 14.

Entrée : Le périmètre p (entier naturel ≥ 3)

début

pour chaque a **de** 1 **à** p **faire**

pour chaque b **de** 1 **à** p **faire**

pour chaque c **de** 1 **à** p **faire**

si un triangle de périmètre p **et de longueurs de côtés** a, b, c **existe alors**

 afficher (a, b, c)

fin

3. Proposer une amélioration simple de l'algorithme précédent qui éviterait d'obtenir des triplets constitués des mêmes entiers permutés.
4. (a) Soit $(a; b; c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leq b \leq c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle de périmètre 13 alors le triplet $(a; b; c + 1)$ définit un triangle de périmètre 14 » ?



(b) Soit $(a; b; c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leq b \leq c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle de périmètre 14 alors le triplet $(a; b; c - 1)$ définit un triangle de périmètre 13 » ?

5. Expliquer pourquoi l'algorithme suivant donne les mêmes sorties que celui de la question 3 :

Entrée : Le périmètre p (entier naturel ≥ 3)

début

```
pour chaque  $a$  de 1 à  $\frac{p}{3}$  faire
  pour chaque  $b$  de  $a$  à  $\frac{p}{2}$  faire
     $c \leftarrow p - a - b$ 
    si  $c < a + b$  et  $c \geq b$  alors
      afficher  $(a, b, c)$ 
```

fin

6. L'implication suivante vous semble-t-elle vraie :

« Si le triplet d'entiers $(a; b; c)$ définit un triangle alors le triplet $(a - 1; b - 1; c - 1)$ définit un triangle » ?

7. Comparer pour quelques valeurs de n la liste de triplets obtenus pour les triangles entiers de périmètre $p = 2n$ et ceux de périmètre $p' = 2n - 3$. Émettre une conjecture puis la démontrer.

2 Triangles entiers rectangles

1. On a modifié le programme de la question 5 afin qu'il affiche les triplets d'entiers définissant un triangle rectangle de périmètre p :

Entrée : Le périmètre p (entier naturel ≥ 3)

début

```
pour chaque  $a$  de 1 à  $\frac{p}{3}$  faire
  pour chaque  $b$  de  $a$  à  $\frac{p}{2}$  faire
    si  $a^2 + b^2 = (p - a - b)^2$  alors
      afficher  $(a, b, p - a - b)$ 
```

fin

Expliquer pourquoi les tests « $c < a + b$ et $c \geq b$ » (où $c = p - a - b$) utilisés en 5 deviennent inutiles ici.

2. A l'aide de ce programme, déterminer l'unique triangle entier rectangle de périmètre 40.

3. Montrer que si $(a; b; c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 40 alors le triplet $(3a; 3b; 3c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 120.

4. Peut-il exister plusieurs triangles entiers rectangles de périmètre 120 ?

5. L'implication suivante est-elle vraie :

« Soient a, b, c trois entiers. Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle entier de périmètre 120 alors le triplet $(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3})$ définit un triangle entier de périmètre 40 » ?

Éléments de réponses – Calculatrices TI

1 Triangles entiers

1. Algorithme de recherche des triplets $(1; b; c)$:

Ti 82
PROGRAM : P1
Prompt N
For(B,1,N)
For(C,1,N)
If C<B+1 et B<C+1
Then
Disp 1,B,C
Disp " "
Pause
End
End
End

On peut aussi observer qu'il est possible d'imposer a priori $1 \leq b \leq c$ et remarquer qu'il suffit alors de tester l'inégalité $c < b + 1$:

Ti 82
PROGRAM : P1
Prompt N
For(B,1,N)
For(C,B,N)
If C<B+1
Then
Disp 1,B,C
Disp " "
Pause
End
End
End

Les triplets obtenus : $(1; 1; 1)$; $(1; 2; 2)$; $(1; 3; 3)$; $(1; 4; 4)$...

On obtient uniquement des triangles isocèles (et de périmètre impair).

preuve. Soit $(1; b; c)$ un triplet d'entiers définissant un triangle. On doit avoir $c < b + 1$. Comme b et c sont des entiers, on a $c \leq b$. Par symétrie des rôles, on a aussi $b \leq c$. D'où $b = c$.

Réciproquement les triplets $(1; b; b)$ où $b \in \mathbb{N}^*$ définissent un triangle.

2. L'algorithme "brut" :



Ti 82 fr
Prompt P
For(A,1,P)
For(B,1,P)
For(C,1,P)
If C<A+B et A<B+C et B<A+C et A+B+C=P
Then
Disp A,B,C
Disp ""
Pause
End
End
End
End

3. On peut supposer $a \leq b \leq c$. On peut alors remarquer que seule la condition « $c < a + b$ » nécessite d'être testée.

Sur une calculatrice Ti 82, le gain de temps est déjà manifeste.

Ti 82 fr
Prompt P
For(A,1,P)
For(B,A,P)
For(C,B,P)
If C<A+B et A+B+C=P
Then
Disp A,B,C
Disp ""
Pause
End
End
End
End

Pour un périmètre égal à 13, on obtient les triplets : (1 ; 6 ; 6) (2 ; 5 ; 6) (3 ; 4 ; 6) (3 ; 5 ; 5) (4 ; 4 ; 5).

Pour un périmètre égal à 14, on obtient les triplets : (2 ; 6 ; 6) (3 ; 5 ; 6) (4 ; 4 ; 6) (4 ; 5 ; 5).

4. (a) Implication fausse : (1;6;6) définit un triangle, mais le triplet (1;6;7) n'en définit pas un.
 (b) Implication vraie. Démonstration par observation des résultats obtenus pour chacun des périmètres.
5. Pour $a > \frac{p}{3}$ et $b \geq a$, on a $-a - b < -\frac{2p}{3}$ et $p - a - b < \frac{1}{3}p$, la condition $c \geq b$ ne peut donc être réalisée. On peut donc éliminer tous les tests sur des entiers $a > \frac{p}{3}$.

De même, si $b > \frac{p}{2}$ alors $p - \frac{b}{2} < \frac{p}{2}$ donc $p - a - b < \frac{p}{2}$ et on ne peut donc avoir $c \geq b$.

Le gain par rapport aux versions précédentes est très nette sur une ti 82, même pour les valeurs $p = 13, p = 14$:



Ti 82 fr
Prompt P
For(A,1,P/3)
For(B,A,P/2)
$P - A - B \rightarrow C$
If $C < A + B$ et $C \geq B$
Then
Disp A,B,C
Disp ""
Pause
End
End
End
End

6. (a) Pour un triplet tel que (1;6;6), il est clair que le triplet obtenu en enlevant 1 à chaque entier ne donne pas un triangle (présence d'un 0).
- (b) Pour un triplet tel que (2;5;6), ce problème n'apparaît pas mais (1;4;5) ne définit pas un triangle.
7. Quelques résultats :
- (a) i. $p = 14$: (2; 6; 6) (3; 5; 6) (4; 4; 6) (4; 5; 5)
- ii. $p = 11$: (1; 5; 5) (2; 4; 5) (3; 3; 5) (3; 4; 4)
- (b) i. $p = 18$: (2; 8; 8) (3; 7; 8) (4; 6; 8) (4; 7; 7) (5; 5; 8) (5; 6; 7) (6; 6; 6)
- ii. $p = 15$: (1; 7; 7) (2; 6; 7) (3; 5; 7) (3; 6; 6) (4; 4; 7) (4; 5; 6) (5; 5; 5)
- (c) i. $p = 10$: (2; 4; 4) (3; 3; 4)
- ii. $p = 7$: (1; 3; 3) (2; 2; 3)

Les listes de triplets pour un périmètre $p = 2n$ et un périmètre $p' = 2n - 3$ contiennent le même nombre d'éléments et à chaque triplet $(a; b; c)$ de somme p correspond le triplet $(a - 1; b - 1; c - 1)$ de somme p' .

Démonstration.

- (a) Si $(a; b; c)$ définit un triangle de périmètre p avec $a \leq b \leq c$, on a $(a - 1) + (b - 1) + (c - 1) = p'$ et $a - 1 \leq b - 1 \leq c - 1$.
- $a - 1, b - 1, c - 1$ ne sont pas nuls puisqu'il a été vu dans les premières questions que la présence d'un 1 dans le triplet n'est possible que pour un triangle entier de périmètre impair.
- Il reste à vérifier que l'on a $c - 1 < (a - 1) + (b - 1)$, c'est à dire que l'on a $c < a + b - 1$. Or nous avons $c < a + b$, donc $c \leq a + b - 1$. Il reste à éliminer le cas $c = a + b - 1$. Or si $c = a + b - 1$, on aurait $a + b + c = 2(a + b) - 1$, ce qui contredit la parité de $p = 2n$. Le triplet $(a - 1; b - 1; c - 1)$ donne donc bien un triangle entier de périmètre p' .
- (b) Si $(u; v; w)$ définit un triangle entier de périmètre p' avec $u \leq v \leq w$, posons $(a; b; c) = (u + 1; v + 1; w + 1)$ (de sorte que $(u; v; w) = (a - 1; b - 1; c - 1)$). Nous avons $a + b + c = p$ et $a \leq b \leq c$. Il reste à vérifier que $c < a + b$, c'est à dire que $w < u + v + 1$, ce qui est évident puisque $w < u + v$.



2 Triangles entiers rectangles

Version ti :

Ti 82 fr
Prompt P
For(A,1,P/3)
For(B,A,P/2)
$P - A - B \rightarrow C$
If $C^2 = A^2 + B^2$
Then
Disp A,B,C
Disp ""
Pause
End
End
End
End

Le seul triangle entier rectangle de périmètre 40 est défini par le triplet (8; 15; 17).

En lançant le programme avec $p = 120$, on obtient les triplets : (20; 48; 52) ; (24; 45; 51) = (3 × 8; 3 × 15; 3 × 17) ; (30; 40; 50).