Des triangles à côtés entiers

Dans les programmes

Notions élémentaires sur le triangle (inégalité triangulaire, Pythagore). Logique : implication, équivalence. Boucles, instructions conditionnelles.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On appellera "triangle entier" les triangles à côtés entiers et "triplet représentant un triangle" le triplet des longueurs des côtés d'un triangle.

1 Triangles entiers

1. Écrire la partie traitement de l'algorithme suivant :

Entrée	un entier naturel n (non nul)
Sortie	Les triplets de la forme $(1; b; c)$ représentant un « triangle entier » où b et c sont inférieurs ou égaux à n

   (a) Émettre une conjecture à partir des résultats obtenus.

   (b) Émettre une conjecture sur la parité du périmètre des triangles représentés par un triplet d'entiers de la forme $(1; b; c)$.

   (c) Démontrer les conjectures faites.

2. Pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre p donné, écrire l'algorithme ci-dessous sur machine et l'utiliser pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre 13 et des triangles de périmètre 14.

```
Entrée : Le périmètre p (entier naturel ⩾ 3)
début
    pour chaque a de 1 à p faire
        pour chaque b de 1 à p faire
            pour chaque c de 1 à p faire
                si un triangle de périmètre p et de longueurs de côtés a, b, c existe alors
                    afficher (a, b, c)
fin
```

3. Proposer une amélioration simple de l'algorithme précédent qui éviterait d'obtenir des triplets constitués des mêmes entiers permutés.

4. (a) Soit $(a; b; c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leqslant b \leqslant c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle de périmètre 13 alors le triplet $(a; b; c+1)$ définit un triangle de périmètre 14 » ?

(b) Soit $(a; b; c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leqslant b \leqslant c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle de périmètre 14 alors le triplet $(a; b; c-1)$ définit un triangle de périmètre 13 » ?

5. Expliquer pourquoi l'algorithme suivant donne les mêmes sorties que celui de la question 3 :

Entrée : Le périmètre p (entier naturel $\geqslant 3$)
début
  pour chaque *a de 1 à* $\frac{p}{3}$ **faire**
    pour chaque *b de a à* $\frac{p}{2}$ **faire**
      $c \longleftarrow p - a - b$
      si $c < a + b$ *et* $c \geqslant b$ **alors**
        afficher (a, b, c)
fin

6. L'implication suivante vous semble-t-elle vraie :
« Si le triplet d'entiers $(a; b; c)$ définit un triangle alors le triplet $(a-1; b-1; c-1)$ définit un triangle » ?
7. Comparer pour quelques valeurs de n la liste de triplets obtenus pour les triangles entiers de périmètre $p = 2n$ et ceux de périmètre $p' = 2n - 3$. Émettre une conjecture puis la démontrer.

2 Triangles entiers rectangles

1. On a modifié le programme de la question 5 afin qu'il affiche les triplets d'entiers définissant un triangle rectangle de périmètre p :

Entrée : Le périmètre p (entier naturel $\geqslant 3$)
début
  pour chaque *a de 1 à* $\frac{p}{3}$ **faire**
    pour chaque *b de a à* $\frac{p}{2}$ **faire**
      si $a^2 + b^2 = (p - a - b)^2$ **alors**
        afficher $(a, b, p - a - b)$
fin

Expliquer pourquoi les tests « $c < a + b$ et $c \geqslant b$ » (où $c = p - a - b$) utilisés en 5 deviennent inutiles ici.
2. A l'aide de ce programme, déterminer l'unique triangle entier rectangle de périmètre 40.
3. Montrer que si $(a; b; c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 40 alors le triplet $(3\,a; 3\,b; 3\,c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 120.
4. Peut-il exister plusieurs triangles entiers rectangles de périmètre 120 ?
5. L'implication suivante est-elle vraie :
« Soient a, b, c trois entiers. Si le triplet $(a; b; c)$ définit un triangle entier de périmètre 120 alors le triplet $\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$ définit un triangle entier de périmètre 40 » ?

Éléments de réponses – ALGOBOX

1 Triangles entiers

1. Un premier algorithme :

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR b ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    POUR c ALLANT_DE 1 A n
      DEBUT_POUR
      SI (c<b+1 et b<1+c et 1<b+c) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "triangle"
        AFFICHER "1 ;"
        AFFICHER b
        AFFICHER "; "
        AFFICHER c
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

On peut aussi observer qu'il est possible d'imposer a priori $1 \leqslant b \leqslant c$ et remarquer qu'il suffit alors de tester l'inégalité $c < b+1$:

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  POUR b ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    POUR c ALLANT_DE b A n
      DEBUT_POUR
      SI (c<b+1) ALORS
        DEBUT_SI
        AFFICHER "triangle"
        AFFICHER "1 ;"
```

```
        AFFICHER b
        AFFICHER "; "
        AFFICHER c
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Les triplets obtenus : (1 ;1 ;1) ; (1 ;2 ;2) ; (1 ;3 ;3) ; (1 ;4 ;4) ...
On obtient uniquement des triangles isocèles (et de périmètre impair).
preuve. Soit $(1;b;c)$ un triplet d'entiers définissant un triangle. On doit avoir $c < b+1$. Comme b et c sont des entiers, on a $c \leqslant b$. Par symétrie des rôles, on a aussi $b \leqslant c$. D'où $b = c$.
Réciproquement les triplets $(1;b;b)$ où $b \in \mathbb{N}^*$ définissent un triangle.

2. L'algorithme "brut" :

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  POUR a ALLANT_DE 1 A p
    DEBUT_POUR
    POUR b ALLANT_DE 1 A p
      DEBUT_POUR
      POUR c ALLANT_DE 1 A p
        DEBUT_POUR
        SI (a<b+c et c<b+a et b<c+a et a+b+c==p) ALORS
          DEBUT_SI
          AFFICHER "("
          AFFICHER a
          AFFICHER "; "
          AFFICHER b
          AFFICHER "; "
          AFFICHER c
          AFFICHER ")  "
          FIN_SI
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. On peut supposer $a \leqslant b \leqslant c$. On peut alors remarquer que seule la condition « $c < a+b$ » nécessite d'être testée.

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  POUR a ALLANT_DE 1 A p
    DEBUT_POUR
    POUR b ALLANT_DE a A p
      DEBUT_POUR
      POUR c ALLANT_DE b A p
        DEBUT_POUR
        SI (c<b+a et a+b+c==p) ALORS
          DEBUT_SI
          AFFICHER "("
          AFFICHER a
          AFFICHER "; "
          AFFICHER b
          AFFICHER "; "
          AFFICHER c
          AFFICHER ")  "
          FIN_SI
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Pour un périmètre égal à 13, on obtient les triplets : (1 ; 6 ; 6) (2 ; 5 ; 6) (3 ; 4 ; 6) (3 ; 5 ; 5) (4 ; 4 ; 5).

Pour un périmètre égal à 14, on obtient les triplets : (2 ; 6 ; 6) (3 ; 5 ; 6) (4 ; 4 ; 6) (4 ; 5 ; 5).

4. (a) Implication fausse : (1;6;6) définit un triangle, mais le triplet (1;6;7) n'en définit pas un.
   (b) Implication vraie. Démonstration par observation des résultats obtenus pour chacun des périmètres.
5. Pour $a > \frac{p}{3}$ et $b \geqslant a$, on a $-a-b < -\frac{2p}{3}$ et $p-a-b < \frac{1}{3}p$, la condition $c \geqslant b$ ne peut donc être réalisée. On peut donc éliminer tous les tests sur des entiers $a > \frac{p}{3}$.

   De même, si $b > \frac{p}{2}$ alors $p - \frac{b}{2} < \frac{p}{2}$ donc $p-a-b < \frac{p}{2}$ et on ne peut donc avoir $c \geqslant b$.

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
```

```
    LIRE p
    POUR a ALLANT_DE 1 A floor(p/3)
      DEBUT_POUR
      POUR b ALLANT_DE a A floor(p/2)
        DEBUT_POUR
        c PREND_LA_VALEUR p-a-b
        SI (c<a+b et c>=b) ALORS
          DEBUT_SI
          AFFICHER "("
          AFFICHER a
          AFFICHER "; "
          AFFICHER b
          AFFICHER "; "
          AFFICHER c
          AFFICHER ")  "
          FIN_SI
        FIN_POUR
      FIN_POUR
  FIN_ALGORITHME
```

6. (a) Pour un triplet tel que $(1;6;6)$, il est clair que le triplet obtenu en enlevant 1 à chaque entier ne donne pas un triangle (présence d'un 0).

   (b) Pour un triplet tel que $(2;5;6)$, ce problème n'apparaît pas mais $(1;4;5)$ ne définit pas un triangle.

7. Quelques résultats :

   (a) i. $p = 14$: (2 ; 6 ; 6) (3 ; 5 ; 6) (4 ; 4 ; 6) (4 ; 5 ; 5)

   ii. $p = 11$: (1 ; 5 ; 5) (2 ; 4 ; 5) (3 ; 3 ; 5) (3 ; 4 ; 4)

   (b) i. $p = 18$: (2 ; 8 ; 8) (3 ; 7 ; 8) (4 ; 6 ; 8) (4 ; 7 ; 7) (5 ; 5 ; 8) (5 ; 6 ; 7) (6 ; 6 ; 6)

   ii. $p = 15$: (1 ; 7 ; 7) (2 ; 6 ; 7) (3 ; 5 ; 7) (3 ; 6 ; 6) (4 ; 4 ; 7) (4 ; 5 ; 6) (5 ; 5 ; 5)

   (c) i. $p = 10$: (2 ; 4 ; 4) (3 ; 3 ; 4)

   ii. $p = 7$: (1 ; 3 ; 3) (2 ; 2 ; 3)

   Les listes de triplets pour un périmètre $p = 2n$ et un périmètre $p' = 2n-3$ contiennent le même nombre d'éléments et à chaque triplet $(a;b;c)$ de somme p correspond le triplet $(a-1;b-1;c-1)$ de somme p'.

   Démonstration.

   (a) Si $(a;b;c)$ définit un triangle de périmètre p avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a $(a-1)+(b-1)+(c-1) = p'$ et $a-1 \leqslant b-1 \leqslant c-1$.

   $a-1$, $b-1$, $c-1$ ne sont pas nuls puisqu'il a été vu dans les premières questions que la présence d'un 1 dans le triplet n'est possible que pour un triangle entier de périmètre impair.

   Il reste à vérifier que l'on a $c-1 < (a-1)+(b-1)$, c'est à dire que l'on a $c < a+b-1$. Or nous avons $c < a+b$, donc $c \leqslant a+b-1$. Il reste à éliminer le cas $c = a+b-1$. Or si $c = a+b-1$, on aurait $a+b+c=2(a+b)-1$, ce qui contredit la parité de $p=2n$. Le triplet $(a-1;b-1;c-1)$ donne donc bien un triangle entier de périmètre p'.

(b) Si $(u;v;w)$ définit un triangle entier de périmètre p' avec $u \leqslant v \leqslant w$, posons $(a;b;c)=(u+1;v+1;w+1)$ (de sorte que $(u;v;w)=(a-1;b-1;c-1)$). Nous avons $a+b+c=p$ et $a \leqslant b \leqslant c$. Il reste à vérifier que $c<a+b$, c'est à dire que $w<u+v+1$, ce qui est évident puisque $w<u+v$.

2 Triangles entiers rectangles

Version algobox :

```
VARIABLES
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE p
  POUR a ALLANT_DE 1 A floor(p/3)
    DEBUT_POUR
    POUR b ALLANT_DE a A floor(p/2)
      DEBUT_POUR
      SI (a*a+b*b==(p-a-b)*(p-a-b)) ALORS
        DEBUT_SI
        c PREND_LA_VALEUR p-a-b
        AFFICHER "("
        AFFICHER a
        AFFICHER "; "
        AFFICHER b
        AFFICHER "; "
        AFFICHER c
        AFFICHER ")  "
        FIN_SI
      FIN_POUR
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

Le seul triangle entier rectangle de périmètre 40 est défini par le triplet $(8;15;17)$.

En lançant le programme avec $p=120$, on obtient les triplets : $(20;48;52)$; $(24;45;51)=(3\times 8;3\times 15;3\times 17)$; $(30;40;50)$.