Des triangles à côtés entiers

Dans les programmes

Notions élémentaires sur le triangle (inégalité triangulaire, Pythagore). Logique : implication, équivalence. Boucles, instructions conditionnelles.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On appellera "triangle entier" les triangles à côtés entiers et "triplet représentant un triangle" le triplet des longueurs des côtés d'un triangle.

1 Triangles entiers

1. Écrire la partie traitement de l'algorithme suivant :

Entrée	un entier naturel n (non nul)
Sortie	Les triplets de la forme $(1;b;c)$ représentant un « triangle entier » où b et c sont inférieurs ou égaux à n

   (a) Émettre une conjecture à partir des résultats obtenus.

   (b) Émettre une conjecture sur la parité du périmètre des triangles représentés par un triplet d'entiers de la forme $(1;b;c)$.

   (c) Démontrer les conjectures faites.

2. Pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre p donné, écrire l'algorithme ci-dessous sur machine et l'utiliser pour déterminer les longueurs des côtés des triangles entiers de périmètre 13 et des triangles de périmètre 14.

Entrée : Le périmètre p (entier naturel $\geqslant 3$)
début
  pour chaque *a de 1 à p* **faire**
    pour chaque *b de 1 à p* **faire**
      pour chaque *c de 1 à p* **faire**
        si *un triangle de périmètre p et de longueurs de côtés a, b, c existe* **alors**
          afficher (a, b, c)
fin

3. Proposer une amélioration simple de l'algorithme précédent qui éviterait d'obtenir des triplets constitués des mêmes entiers permutés.

4. (a) Soit $(a;b;c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leqslant b \leqslant c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a;b;c)$ définit un triangle de périmètre 13 alors le triplet $(a;b;c+1)$ définit un triangle de périmètre 14 » ?

(b) Soit $(a;b;c)$ un triplet d'entiers tel que $a \leqslant b \leqslant c$. L'implication suivante est-elle vraie : « Si le triplet $(a;b;c)$ définit un triangle de périmètre 14 alors le triplet $(a;b;c-1)$ définit un triangle de périmètre 13 » ?

5. Expliquer pourquoi l'algorithme suivant donne les mêmes sorties que celui de la question 3 :

```
Entrée : Le périmètre p (entier naturel ⩾ 3)
début
    pour chaque a de 1 à p/3 faire
        pour chaque b de a à p/2 faire
            c ⟵ p − a − b
            si c < a + b et c ⩾ b alors
                afficher (a, b, c)
fin
```

6. L'implication suivante vous semble-t-elle vraie :
« Si le triplet d'entiers $(a;b;c)$ définit un triangle alors le triplet $(a-1;b-1;c-1)$ définit un triangle » ?
7. Comparer pour quelques valeurs de n la liste de triplets obtenus pour les triangles entiers de périmètre $p=2n$ et ceux de périmètre $p'=2n-3$. Émettre une conjecture puis la démontrer.

2 Triangles entiers rectangles

1. On a modifié le programme de la question 5 afin qu'il affiche les triplets d'entiers définissant un triangle rectangle de périmètre p :

```
Entrée : Le périmètre p (entier naturel ⩾ 3)
début
    pour chaque a de 1 à p/3 faire
        pour chaque b de a à p/2 faire
            si a² + b² = (p − a − b)² alors
                afficher (a, b, p − a − b)
fin
```

Expliquer pourquoi les tests « $c < a+b$ et $c \geqslant b$ » (où $c = p-a-b$) utilisés en 5 deviennent inutiles ici.
2. A l'aide de ce programme, déterminer l'unique triangle entier rectangle de périmètre 40.
3. Montrer que si $(a;b;c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 40 alors le triplet $(3\,a;3\,b;3\,c)$ définit un triangle rectangle de périmètre 120.
4. Peut-il exister plusieurs triangles entiers rectangles de périmètre 120 ?
5. L'implication suivante est-elle vraie :
« Soient a, b, c trois entiers. Si le triplet $(a;b;c)$ définit un triangle entier de périmètre 120 alors le triplet $\left(\frac{a}{3};\frac{b}{3};\frac{c}{3}\right)$ définit un triangle entier de périmètre 40 » ?