POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

Formation disciplinaire Mathématiques

Accompagnement pédagogique et didactique des nouveaux programmes

Ressources pour la classe

GRD maths groupe lycée

académie Lyon
RÉGION ACADÉMIQUE AUVERGNE-RHÔNE-ALPES
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Objectifs de la formation

- **Comment construire une progressivité dans l'apprentissage de la démonstration en 2de?**

- **Comment accompagner la diversité des profils en spécialité mathématique de 1ère ? Comment construit-on le passage d'une logique de contenus à celle de parcours d'apprentissage?**

FAIRE UN CHOIX EN CONSTRUISANT UN PROJET

En première — En terminale — HORIZONS

Des contenus:
Algèbre, Analyse, Géométrie, Statistiques, Probabilités, Algorithmique et Programmation, Vocabulaire ensembliste et logique

Des objectifs:

- Développer le goût des mathématiques, avec notamment des approches historiques
- Consolider les acquis, renforcer les bases, approfondir les notions
- Développer les interactions avec d'autres enseignements

Mathématiques complémentaires

Spécialité mathématiques

Mathématiques expertes

Un projet d'orientation qui se construit

->Sciences humaines et sociales

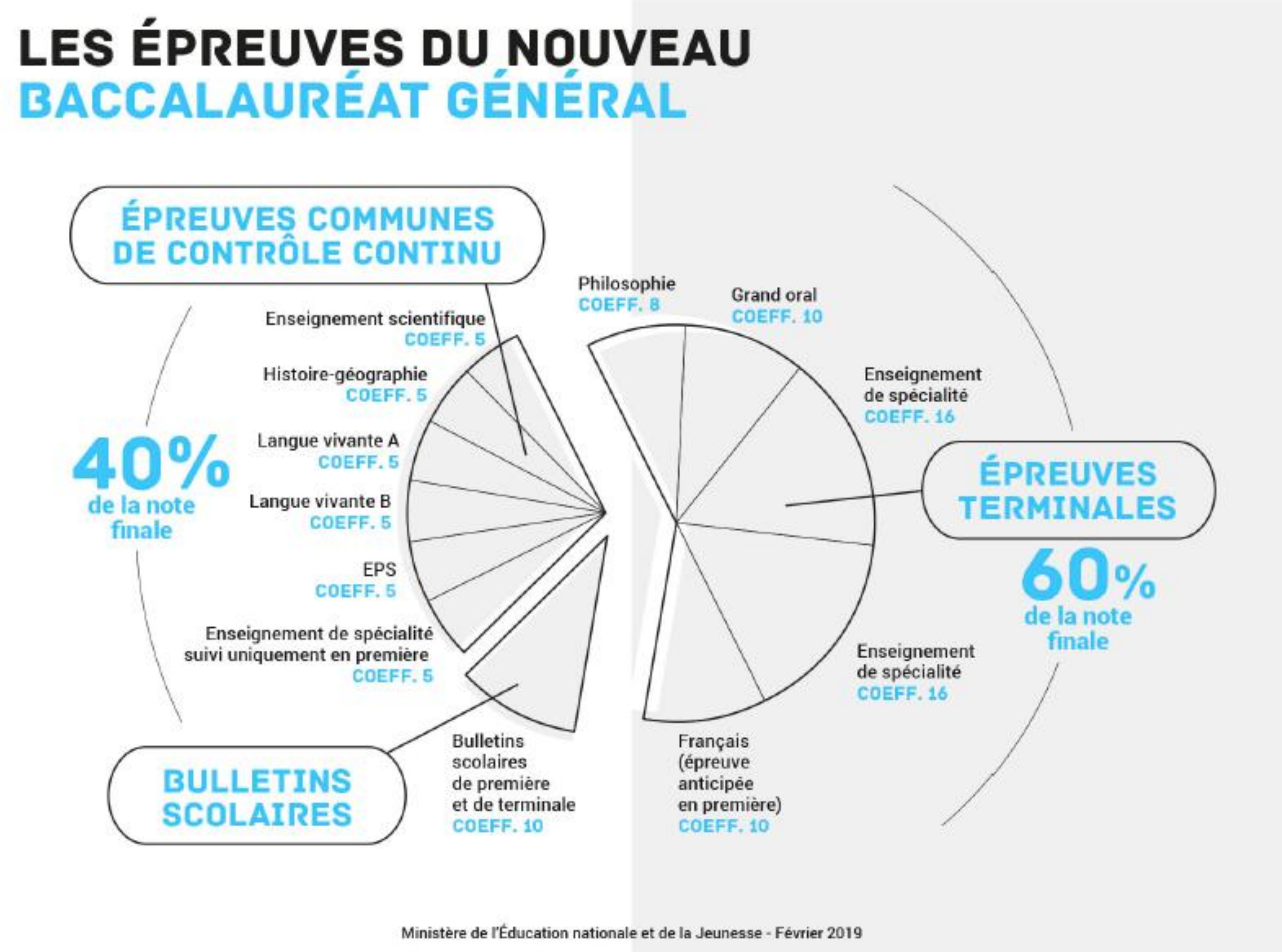
->Sciences économiques et de gestion

->Sciences du vivant et géosciences

->Sciences informatique et industrie du numérique

->Sciences technologie ingénierie et mathématiques

Le poids de la spécialité mathématique:



Le poids de la spécialité mathématique:

LE CHOIX DE LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE 1ère

L'élève abandonne les mathématiques en terminale
E3C 5% de la note finale

L'élève choisit les *Mathématiques complémentaires*
(dans le cadre du Bulletin 10%)

L'élève choisit les *Mathématiques expertes*
(dans le cadre du Bulletin 10%)

L'élève choisit la SPÉ MATH en terminale
16% de la note finale

GRAND ORAL
10% de la note finale

Les nouveautés du programme de 2^{nde}:

L'enseignement des mathématiques de la classe de seconde est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis du collège et une culture mathématique de base, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques ainsi que de la simplification et de la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- préparer au choix de l'orientation : choix de la spécialité mathématiques dans la voie générale, choix de la série dans la voie technologique ;
- assurer les bases mathématiques nécessaires à toutes les poursuites d'études au lycée.

Les nouveautés du programme de 2nde:

- **Compétences mathématiques**

Dans le prolongement des cycles précédents, six grandes compétences sont travaillées :

- **chercher**, expérimenter – en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- **modéliser**, faire une simulation, valider ou invalider un modèle ;
- **représenter**, choisir un cadre (numérique, algébrique, géométrique...), changer de registre ;
- **raisonner**, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- **calculer**, appliquer des techniques et mettre en œuvre des algorithmes ;
- **communiquer** un résultat par oral ou par écrit, expliquer une démarche.

Les nouveautés du programme de 2^{nde}:

- **Place de l'oral**

Les étapes de verbalisation et de reformulation jouent un rôle majeur dans l'appropriation des notions mathématiques et la résolution des problèmes. Comme toutes les disciplines, les mathématiques contribuent au développement des compétences orales, notamment à travers la pratique de l'argumentation. Celle-ci conduit à préciser sa pensée et à expliciter son raisonnement de manière à convaincre. Elle permet à chacun de faire évoluer sa pensée, jusqu'à la remettre en cause si nécessaire, pour accéder progressivement à la vérité par la preuve. Des situations variées se prêtent à la pratique de l'oral en mathématiques : la reformulation par l'élève d'un énoncé ou d'une démarche, les échanges interactifs lors de la construction du cours, les mises en commun après un temps de recherche, les corrections d'exercices, les travaux de groupe, les exposés individuels ou à plusieurs... L'oral mathématique mobilise à la fois le langage naturel et le langage symbolique dans ses différents registres (graphiques, formules, calcul).

Les nouveautés du programme de 2nde:

- **Trace écrite**

Disposer d'une trace de cours claire, explicite et structurée est une aide essentielle à l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux étapes importantes de recherche, d'appropriation individuelle ou collective, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les méthodes et les stratégies étudiées en classe.

- **Histoire des mathématiques**

La notion apparemment familière de nombre ne va pas de soi. Deux exemples : la crise provoquée par la découverte des irrationnels chez les mathématiciens grecs, la différence entre « nombres réels » et « nombres de la calculatrice ». Il s'agit également de souligner le gain en efficacité et en généralité qu'apporte le calcul littéral, en expliquant qu'une grande partie des mathématiques n'a pu se développer qu'au fur et à mesure de l'élaboration, au cours des siècles, de symbolismes efficaces. Il est possible d'étudier des textes anciens d'auteurs tels que Diophante, Euclide, Al-Khwarizmi, Fibonacci, Viète, Fermat, Descartes et mettre en évidence leurs aspects algorithmiques.

Les nouveautés du programme de 2^{nde}: Des lignes directrices pour l'enseignement

Le professeur veille à établir un équilibre entre divers temps de l'apprentissage :

- les temps de recherche, d'activité, de manipulation ;
- les temps de dialogue et d'échange, de verbalisation ;
- les temps de cours, où le professeur expose avec précision, présente certaines démonstrations et permet aux élèves d'accéder à l'abstraction ;
- les temps où sont présentés et discutés des exemples, pour vérifier la bonne compréhension de tous les élèves ;
- les exercices et problèmes, allant progressivement de l'application la plus directe au thème d'étude ;
- les rituels, afin de consolider les connaissances et les méthodes.

Les nouveautés du programme de 2^{nde}:

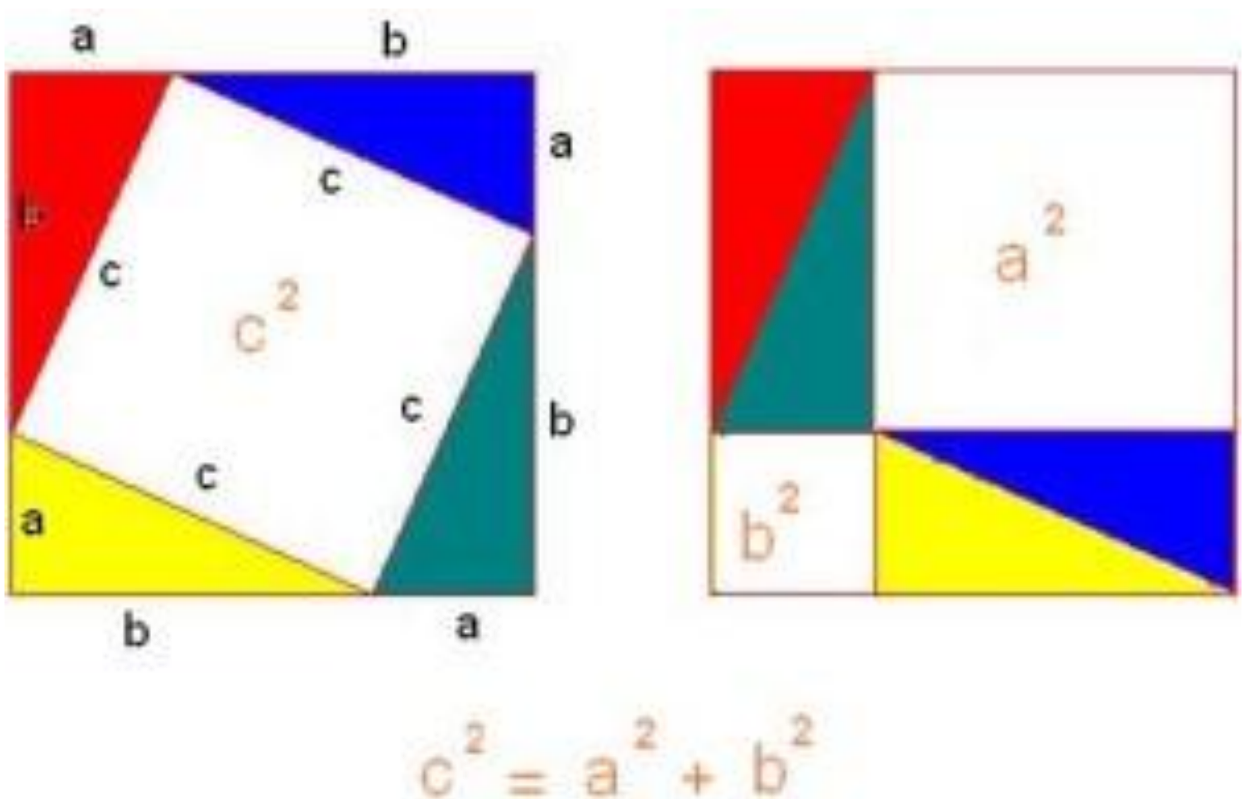
Démonstrations

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Approfondissements possibles

- Développement décimal illimité d'un nombre réel.
- Observation, sur des exemples, de la périodicité du développement décimal de nombres rationnels, du fait qu'un développement décimal périodique correspond à un rationnel.

ATELIER 1:
La démonstration en 2^{nde}



Le programme (les 13 démonstrations…)

Nombres et calculs :

Manipuler les nombres réels :

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier :

- Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est multiple de a.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Utiliser le calcul littéral :

- Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité :
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Géométrie :

Manipuler les vecteurs du plan :

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Résoudre des problèmes de géométrie :

- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.
- Relation trigonométrique
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$
dans un triangle rectangle.

Représenter et caractériser les droites du plan :

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Fonctions :

Se constituer un répertoire de fonctions de référence :

- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x, = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

Étudier les variations et les extremums d'une fonction :

- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Comment motiver la nécessité de démontrer en mathématiques ?

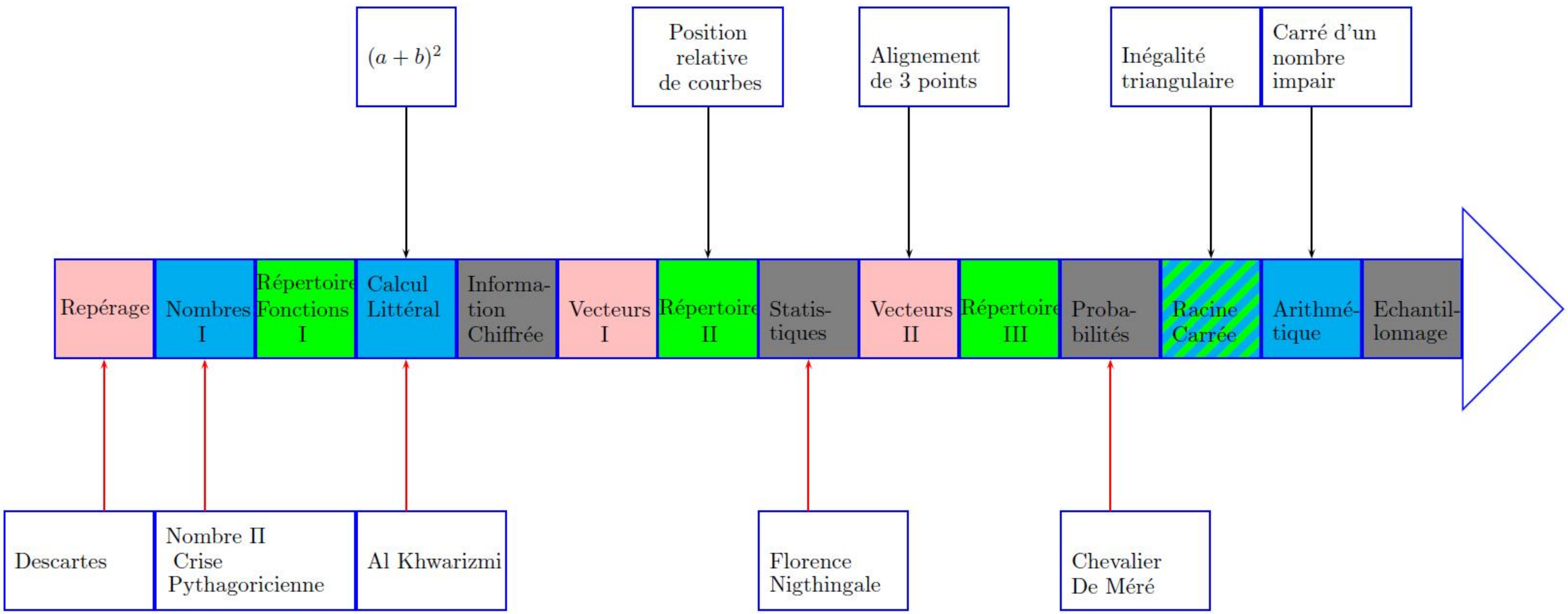
Privilégier les énoncés ouverts avant d'institutionnaliser.

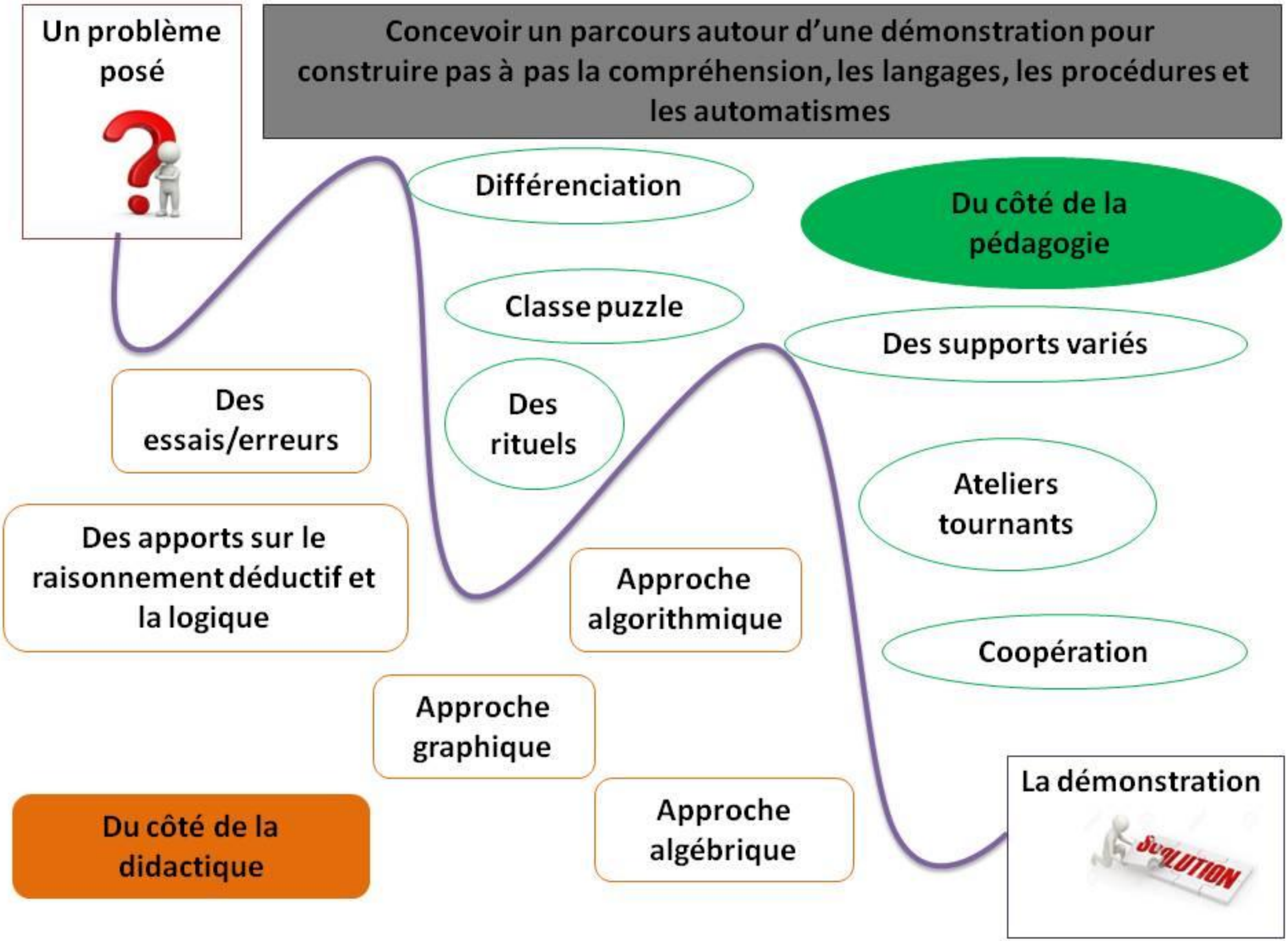
Susciter le débat.

Trouver une accroche en posant un problème que les élèves ne savent pas résoudre avec les outils connus.

Proposer régulièrement des «trompe-l'œil».

Le programme : proposition de progression

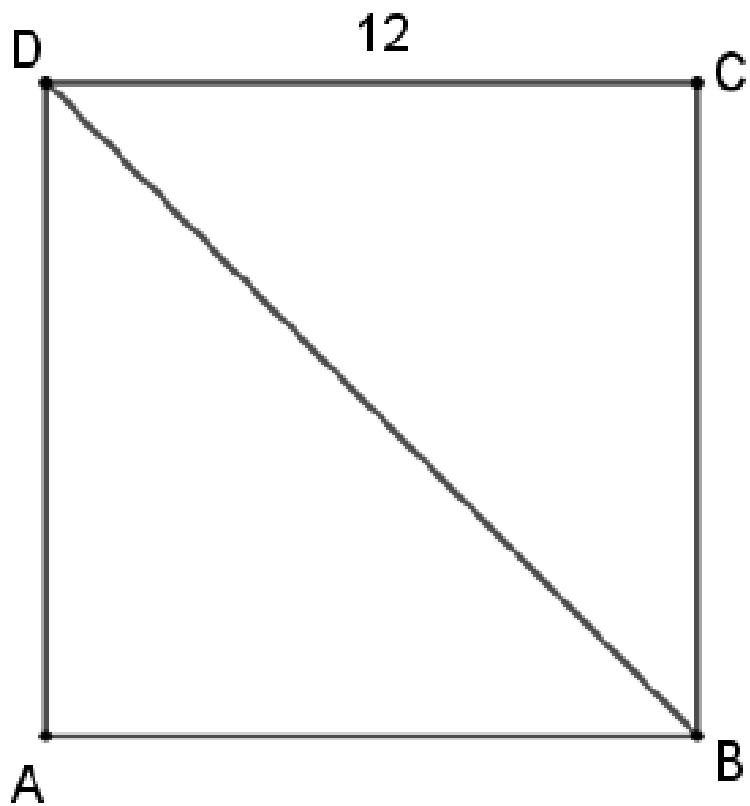



Un problème posé
Concevoir un parcours autour d'une démonstration pour construire pas à pas la compréhension, les langages, les procédures et les automatismes
Différenciation
Du côté de la pédagogie
Classe puzzle
Des supports variés
Des essais/erreurs
Des rituels
Ateliers tournants
Des apports sur le raisonnement déductif et la logique
Approche algorithmique
Coopération
Approche graphique
La démonstration
SOLUTION
Approche algébrique
Du côté de la didactique

Un problème posé

Irrationalité de $\sqrt{2}$

Seconde



Calculatrice interdite

A-t-on $\sqrt{2} = \dfrac{17}{12}$?

Coopération
Groupes de besoin
Tutorat

Activité de groupe : *calculatrice autorisée*

1. Trouver une fraction plus proche de $\sqrt{2}$ que $\dfrac{17}{12}$.
2. Trouver une fraction la plus proche possible de $\sqrt{2}$.

Après un temps de recherche donné :

- Chaque groupe propose sa réponse, en verbalisant la démarche utilisée.
- Détermination de la meilleure approximation

La démonstration

FORMALISATION

<u>Raisonnement par l'absurde :</u> on suppose que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$,

où p et q sont des entiers naturels et $\dfrac{p}{q}$ est irréductible.

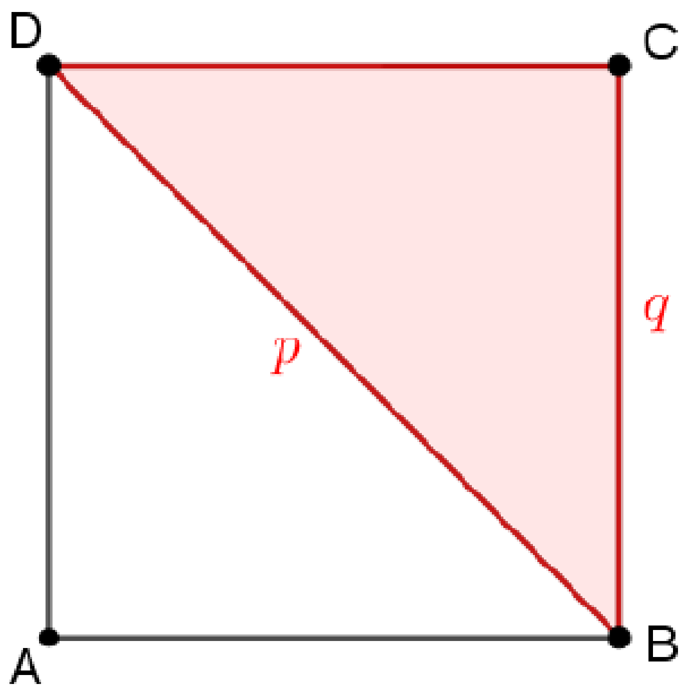
- **Méthode 1 :** On aboutit à une contradiction en utilisant une disjonction de cas sur le chiffre des unités de p et q.

- **Méthode 2 :** On aboutit à une contradiction en raisonnant sur la parité
(*prérequis :* contraposée, le carré d'un nombre impair est impair)

Approche géométrique

La démonstration

Méthode 3 : Le professeur ramène le problème à un problème géométrique



On suppose que BCD est le plus petit triangle isocèle rectangle dont les côtés ont des longueurs entières, d'hypoténuse p.

On aboutit à une contraction en trouvant un triangle isocèle rectangle, de dimensions entières inférieures à celles de BCD.

DIFFERENCIER

- On peut envisager que tous les élèves cherchent la démonstration 1, présentée sous forme d'un exercice très guidé.

- Les démonstrations 2 et 3 peuvent être préparées et présentées par un groupe d'élèves au groupe classe, sous forme d'exposés.

Devoir maison sur l'irrationalité de $\sqrt{2}$
Document de travail GRD Lycée

Les livres de Philosophie qualifient souvent de "crise profonde" la découverte des nombres irrationnels. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et l'existence de nombres dits "incommensurables" va à l'encontre de la vision du monde que s'en font les Pythagoriciens et leur École. Hippase de Métaponte aurait été exclu de l'école après avoir révélé cette découverte. On raconte qu'il aurait péri dans un naufrage.

1. **Recherche documentaire :**
   Présenter en cinq lignes une biographie du philosophe et mathématicien Hippase de Métaponte. Expliquer ensuite, le plus simplement possible, ce que sont des nombres incommensurables.

Autre différenciation possible

Méthode 1

2. **Dans la peau d'Hippase :**

Pour démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, nous allons supposer que nous faisons fausse route et qu'il est rationnel et voir jusqu'où cela nous mène.

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Il peut donc s'écrire sous forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls.

(a) En utilisant l'égalité $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, montrer que $p^2 = 2 \times q^2$.

(b) Suivant le dernier chiffre de p, quel est le dernier chiffre de son carré ? Compléter le tableau suivant :

Dernier chiffre de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de p^2										

(c) Suivant le dernier chifre de q, quel est le dernier chiffre de $2 \times q^2$? Compléter le tableau suivant :

Dernier chiffre de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de $2 \times q^2$										

(d) En supposant que l'égalité $p^2 = 2 \times q^2$ est vraie, quelle est la seule possibilité pour le dernier chiffre de ces deux nombres ?

(e) Dans ce cas, par quel chiffre se termine p et par quels chiffres peut se terminer q ?

(f) La fraction $\frac{p}{q}$ est elle irréductible ?

(g) Conclure.

Approche algorithmique

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des décimaux (*algorithme de balayage avec Python*)

```
a=1.414213562
pas=10**(-15)

while a**2 < 2:
    a=a+pas

print(a-pas," ",a)
```

Des supports variés

- Encadrement de $\sqrt{2}$ par des rationnels (*tableur*)

A	B
a	b
1	2
1 1/3	1 1/2
1 2/5	1 3/7
1 7/17	1 5/12
1 12/29	1 17/41
1 41/99	1 29/70
1 70/169	1 99/239
1 239/577	1 169/408

On utilise l'égalité :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

Atelier : A vous de jouer!

Par groupe de 4 travailler sur un parcours possible sur une des 2 démonstrations suivantes :

- 1/3 n'est pas décimal;
- Positions relatives des courbes de la fonction carré et de la fonction cube.
- Condition de colinéarité de deux vecteurs

Consigne : Comment enseigner ces démonstrations ?
réfléchir à une accroche,
aux modalités pédagogiques,
à la formalisation,
quel parcours d'apprentissage pour que l'élève soit acteur?)

Temps de synthèse

- Présentations des ressources de la malette?
- Quelles progressivité et progression?
- Du côté de la pédagogie: quels rituels pour automatiser? Quels supports? Quelles organisations dans la classe?...
- Du côté de la didactique: quels essais/erreurs? Quelle approche algorithmique? Graphique? Algébrique? Quels apports de logique?

Exemples de ces rituels proposés par l'IREM de Clermont

Sur le thème de la logique…

Soit x un réel.

La négation de **« $x < 3$ et $x \geq -2$ »** est :

a) « $x \geq 3$ et $x < -2$ » ;

b) « $x \geq 3$ ou $x < -2$ ».

Sur le thème de l'algorithmie…

On considère l'algorithme suivant :

Entrée : Saisir un nombre x.
Traitement
  Si $x < -2$ **alors**
    y prend la valeur $-2x+1$;
  SinonSi $x \geqslant -2$ et $x < 4$ **alors**
    y prend la valeur x^2+1 ;
  Sinon
    y prend la valeur $\sqrt{x}+15$.
  FinSi
FinTraitement
Sortie : Afficher y.

Quelle est la valeur affichée en sortie, en saisissant 1 en entrée ?

A « piquer » sans modération sur le site de l'IREM Clermont

http://www.irem.univ-bpclermont.fr/Calcul-Mental-et-Automatismes-en,1306

Le programme (les 13 démonstrations…)

Capsules vidéo

https://www.monclasseurdemaths.fr/lycee/demonstrations2de/

Nombres et calculs :

Manipuler les nombres réels :

- Le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Utiliser les notions de multiple, diviseur et de nombre premier :

- Pour une valeur numérique de a, la somme de deux multiples de a est multiple de a.
- Le carré d'un nombre impair est impair.

Utiliser le calcul littéral :

- Quels que soient les réels positifs a et b, on a $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
- Si a et b sont des réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- Pour a et b réels positifs, illustration géométrique de l'égalité :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Géométrie :

Manipuler les vecteurs du plan :

- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Résoudre des problèmes de géométrie :

- Le projeté orthogonal du point M sur une droite Δ est le point de la droite Δ le plus proche du point M.
- Relation trigonométrique

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

dans un triangle rectangle.

Représenter et caractériser les droites du plan :

- En utilisant le déterminant, établir la forme générale d'une équation de droite.

Fonctions :

Se constituer un répertoire de fonctions de référence :

- Étudier la position relative des courbes d'équation $y = x, = x^2$, $y = x^3$, pour $x \geq 0$.

Étudier les variations et les extremums d'une fonction :

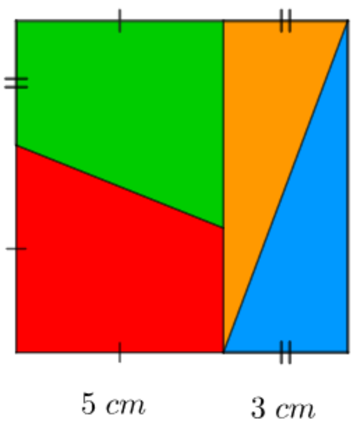
- Variations des fonctions carré, inverse, racine carrée.

Le puzzle de Lewis Caroll ou comment motiver l'intérêt de la démonstration

Après avoir demandé aux élèves de reconstituer leur puzzle du carré en un rectangle (sans leur montrer), annoncer:

Lewis Carroll aimait les situations étranges, paradoxales, qui heurtent notre logique: en quoi ce puzzle est-il paradoxal?

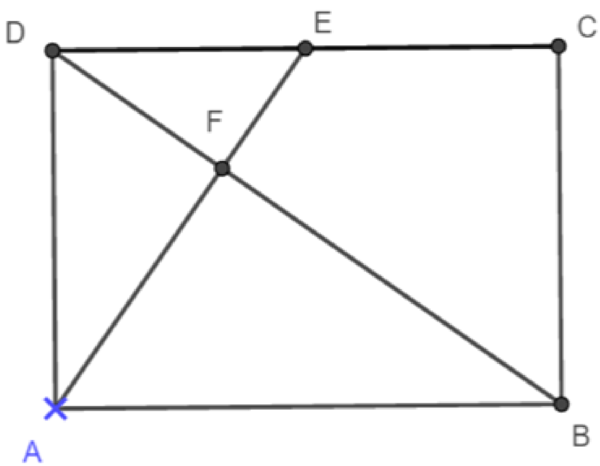
D'après Véronique Cerclé, APMEP _ PLOT N°29



https://www.geogebra.org/m/spv7p4sj

Faire naître le besoin de « preuve » chez nos élèves

ABCD est un rectangle de dimensions 19,8 et 14 cm.
E est le milieu du segment [DC].



Que peut-on dire des droites (DB) et (AE) ? Justifier.

Géogébra mesure un angle de 90.00° avec 2 décimales de précision alors que ce n'est pas un angle droit!

Peut être utilisé pour motiver l'utilisation des vecteurs et du produit scalaire

Plusieurs démonstrations possibles

Faire raisonner nos élèves en utilisant les identités remarquables

L'énoncé est adapté d'un problème proposé par Movshovitz-Hadar et Webb dans « One equals zero » (1998).

Un élève de 2nde est fier d'annoncer à son professeur qu'il a réussi à prouver cet étrange paradoxe: 4 = 5

(la double flèche $\Rightarrow$ signifie *implique que*)

$$16-36=25-45$$

$$\Rightarrow 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow 4^2-2\times 4\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\times 5\times\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2=a^2-2\times a\times b+b^2$, on en déduit que :

$$\Rightarrow\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 4=5.$$

Qu'en pensez-vous?

ATELIER 2 :
Gestion de l'hétérogénéité en classe de première SPÉ-MATH

La classe de Titeuf - Zep

FAIRE UN CHOIX EN CONSTRUISANT UN PROJET

En première | En terminale | HORIZONS

Des contenus:
Algèbre, Analyse, Géométrie, Statistiques, Probabilités, Algorithmique et Programmation, Vocabulaire ensembliste et logique

Des objectifs:

- Développer le goût des mathématiques, avec notamment des approches historiques
- Consolider les acquis, renforcer les bases, approfondir les notions
- Développer les interactions avec d'autres enseignements

Mathématiques complémentaires

Spécialité mathématiques

Mathématiques expertes

Un projet d'orientation qui se construit

->Sciences humaines et sociales

->Sciences économiques et de gestion

->Sciences du vivant et géosciences

->Sciences informatique et industrie du numérique

->Sciences technologie ingénierie et mathématiques

Le poids de la spécialité mathématique:

LE CHOIX DE LA SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE 1ère

L'élève abandonne les mathématiques en terminale
E3C 5% de la note finale

L'élève choisit les *Mathématiques complémentaires*
(dans le cadre du Bulletin 10%)

L'élève choisit les *Mathématiques expertes*
(dans le cadre du Bulletin 10%)

L'élève choisit la SPÉ MATH en terminale
16% de la note finale

GRAND ORAL
10% de la note finale

Autour de la notion de la fonction exponentielle

Il y a bien longtemps, dans une galaxie lointaine, très lointaine....

Programme TC 1971

V. — Exemples de fonctions d'une variable réelle

Certains résultats de ce chapitre, déjà connus des élèves, pourront illustrer les chapitres précédents ; il sera opportun de répartir les différentes rubriques de celui-ci entre plusieurs moments de l'année.

1 - Fonction $x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbf{Z})$; dérivée ; primitive.

2 - Fonction $x \longmapsto x^r$ $(r \in \mathbf{Q} : x > 0)$; dérivée ; primitive.

3 - Suites arithmétiques et géométriques. Somme des n premiers termes.

4 - Fonctions circulaires ; dérivées (révision) ; dérivées et primitives de

$$x \longmapsto \cos(ax+b) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \sin(ax+b).$$

5 - Logarithme népérien (notation Log) ; $\text{Log}\ x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ $(x > 0)$. Limite, quand la variable positive x tend vers l'infini de $\text{Log}\ x$ et $\frac{\text{Log}\ x}{x}$. Limite de $x\ \text{Log}\ x$ quand x tend vers 0. Représentation graphique.

6 - Fonction exponentielle (notation exp).

Propriétés ; dérivée ; représentation graphique ; nombre e ; notation e^x ; limite de e^x/x quand x tend vers $+\infty$.

7 - Autres fonctions logarithmiques et exponentielles.

Relation entre les fonctions exponentielle et logarithmique de base a, et celles de base e.

Notation e^{ix} pour désigner $\cos x + i \sin x$; ω étant une constante réelle, dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{i\omega x}$.

Remarque. L'étude d'exemples de fonctions composées du type logarithmique ou exponentiel sera strictement limitée aux cas où sont en évidence les intervalles sur lesquels la dérivée garde un signe constant et où les indéterminations à lever sont uniquement celles qui ont été énumérées plus haut.

Des programmes plus récents, mais tout de même différents. Saurez-vous les reconnaître ?

Interpréter e^b comme la solution de l'équation ln x = b. Étudier les variations et représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e^x$ sur un intervalle donné.	La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. Propriétés opératoires de la fonction exponentielle de base e.	Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, que $\ln(e^b) = b$. L'unicité de la solution est montrée à l'aide de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto e^x$ est obtenue à l'aide des TIC. Ces propriétés sont conjecturées à l'aide de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien ou à l'aide de la calculatrice.
Étudier les variations des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).	Dérivée des fonctions $x \mapsto e^{ax}$ (a réel non nul).	Illustrer le cas a = 1 à l'aide des coefficients directeurs de quelques tangentes. Dans les énoncés de problèmes ou d'exercices, la formule, admise, est à choisir dans un formulaire spécifique donné en annexe. Les fonctions $x \mapsto q^x$ (avec q =10 et q = $\frac{1}{2}$) sont étudiées selon les besoins du domaine professionnel ou des autres disciplines.
Résoudre des équations du type $e^{ax} = b$ et des inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). Résoudre des équations du type $\ln(ax) = b$ (avec a > 0) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ (ou $\ln(ax) \leq b$) (avec a > 0).	Processus de résolution d'équations du type $e^{ax} = b$ et d'inéquations du type $e^{ax} \geq b$ (ou $e^{ax} \leq b$). Processus de résolution d'équations du type $\ln(ax) = b$ (avec a > 0) et des inéquations du type $\ln(ax) \geq b$ ou du type $\ln(ax) \leq b$ (avec a > 0).	

Fonction exponentielle		
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur **R**, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x.	▣ Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$. • Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. • Connaître et exploiter $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto \exp(u(x))$, notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisées dans des domaines variés. On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 et la limite en 0 de $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$. ⇆ [SPC et SVT] Radioactivité. AP *Étude de phénomènes d'évolution.*

Fonctions exponentielles Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	• Connaître les variations, les limites et la représentation graphique de la fonction exponentielle.	Pour tout nombre réel a, le réel $\exp(a)$ est défini comme unique solution de l'équation d'inconnue b : $\ln b = a$.
Relation fonctionnelle. Notation e^x.	• Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. • Passer de $\ln x = a$ à $x = \mathrm{e}^a$ et inversement, a étant un réel et x un réel strictement positif.	On justifie la notation e^x.
Exemples de fonctions exponentielles de base a, $x \mapsto a^x$, où a est un réel strictement positif, et de fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$, avec α réel. Comparaison des comportements en $+\infty$ de la fonction exponentielle (de base e) et de la fonction logarithme népérien avec les fonctions puissances.	• Connaître et utiliser les limites de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ et $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^n}$ en $+\infty$, n étant un entier naturel.	En lien avec les autres disciplines, on étudie quelques exemples simples de fonctions exponentielles de base a ou de fonctions puissances, mises sous la forme e^u. Aucun résultat théorique n'est à connaître. Ces résultats sont conjecturés puis admis. On se limite à des exemples simples d'utilisation. L'approche, à l'aide d'un logiciel, de la limite en $+\infty$ de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, avec $\alpha \in \left]0, 1\right[$, enrichit le point de vue. ⇆ Radioactivité. ⇆ Transmission par courroie.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions exponentielles		
Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$. Relation fonctionnelle.	□ Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q.	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur **R** et transforment les sommes en produits.
Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.	□ Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. □ Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.	On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.
Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.	□ Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.

Des programmes différents qui mènent à des activités différentes

74 Une suite qui converge vers e

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - (x+1).$$

1 Étudier les variations de f et en déduire que pour tout réel x, $1 + x \leqslant e^x$.

2 Démontrer que pour tout réel $x < 1$, on a : $e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$

(on pourra écrire l'inégalité du **1** pour un réel y quelconque et poser $y = -x$).

3 a. À l'aide de l'inégalité du **1** démontrer que pour tout entier n non nul, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e$.

b. En posant $x = \frac{1}{n+1}$ dans l'inégalité du **2**, démontrer que :

$$e \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

(on vérifiera que, dans ce cas, on a bien l'hypothèse $x < 1$).

4 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

a. Démontrer que pour tout entier $n > 0$:

$$0 \leqslant e - u_n \leqslant \frac{3}{n}.$$

b. En déduire que la suite (u_n) converge vers e.

N_0 est le nombre de noyaux radioactifs dans l'échantillon à l'instant $t = 0$, on a :

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t \ln 2}{T}},$$

où T est une constante liée à l'élément radioactif considéré.

a. Exprimer en fonction de N_0 le nombre $N(T)$.

b. Montrer que, pour tout réel $t \geqslant 0$, on a :

$$N(t+T) = \frac{1}{2} N(t).$$

c. Expliquer alors pourquoi T est appelée période radioactive ou demi-vie de l'élément.

Dans la suite, on considère du césium 37 dont la période radioactive est $T = 30$ ans.

d. Si un échantillon de césium 37 contient $5{,}5 \cdot 10^{14}$ noyaux à un instant donné, combien en contiendra-t-il 30 ans plus tard ? 120 ans plus tard ?

e. Combien de temps faudra-t-il environ pour que la quantité d'atomes de césium présent dans un échantillon soit divisée par 1 000 ? On répondra à cette question de deux façons différentes :

- en résolvant l'équation $N(t) = \frac{N_0}{1\,000}$;
- en utilisant l'approximation $2^{10} \approx 1\,000$ et la notion de demi-vie.

Comparer les deux résultats obtenus.

74

On rappelle que la fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

a. Résoudre l'équation $\log a = 3$, puis $\log a = 2{,}7$.

b. Exprimer a en fonction de b si $\log a = b$.

75

La magnitude M d'un séisme est liée à l'énergie E libérée au foyer du séisme par la formule approximative : $\log E = 11{,}4 + 1{,}5M$, où E est exprimée en ergs (1 erg = 10^{-7} joules).

Calculer les énergies libérées au foyer dans les cas où $M = 3$ et $M = 8{,}5$. Comparer ces énergies en calculant leur quotient. Qu'en penser ?

Constat:

- On aborde et on étudie d'ores et déjà la fonction exponentielle de manière variée, avec différents objectifs de formation.

- Nos représentations mentales sont fondées sur l'enseignement actuel de la fonction exponentielle en terminale (en particulier en TS).

Conséquences:

- S’approprier le nouveau programme pour se départir des représentations sur l’enseignement de la fonction exponentielle.
- Différencier l’enseignement dans une même classe (vs d’une filière à l’autre).

En 1ère – Spé Math, un programme qui couvre un large spectre:

Intentions majeures

La classe de première générale est conçue pour préparer au baccalauréat général, et au-delà à une poursuite d'études réussie et à l'insertion professionnelle.

L'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de première générale est conçu à partir des intentions suivantes :

- permettre à chaque élève de consolider les acquis de la seconde, de développer son goût des mathématiques, d'en apprécier les démarches et les objets afin qu'il puisse faire l'expérience personnelle de l'efficacité des concepts mathématiques et de la simplification et la généralisation que permet la maîtrise de l'abstraction ;
- développer des interactions avec d'autres enseignements de spécialité ;
- préparer au choix des enseignements de la classe de terminale : notamment choix de l'enseignement de spécialité de mathématiques, éventuellement accompagné de l'enseignement optionnel de mathématiques expertes, ou choix de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires.

En $1^{ère}$ – Spé Math, un programme qui couvre un large spectre:

- **Fonction exponentielle**

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.
- Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

En 1ère – Spé Math, un programme qui couvre un large spectre:

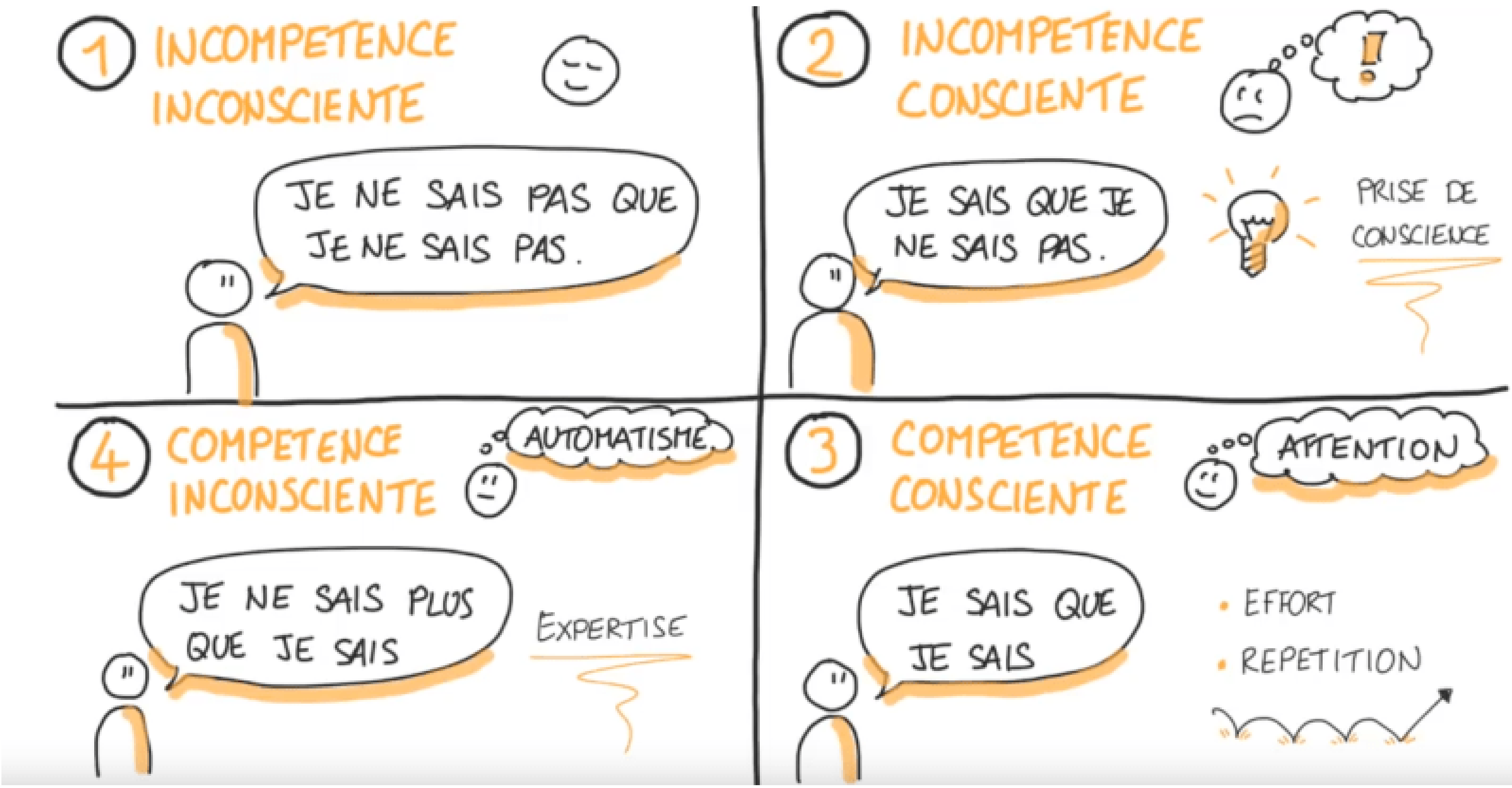
Exemple d'algorithme

– Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $((1+\frac{1}{n})^n)$.

Approfondissements possibles

– Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
– Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
– La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

Les quatre phases de l'apprentissage Abraham Maslow



Cyril Maître

PLAN DE SEQUENCE

Source : Sylvain CONNAC

Evaluation diagnostique	**Découverte** à travers une question génératrice **Situation problème** **Approche historique**	**Institutionnalisation** **Entrainements** **Mémorisation** Systématisation	**Evaluation formative**	**Travail en groupes de besoin : plan de travail, ateliers…** Soutien/remédiation Approfondissement	**Evaluation sommative** Proposition d'un contexte inédit et complexe
Différenciation successive : questions allant du plus simple au plus compliqué	**Différenciation simultanée : supports, ressources, approches pouvant être différents**	**Différenciation successive ou simultanée**	**Différenciation successive ou simultanée possible**	**Différenciation simultanée : plan de travail, ceintures de compétences**	**Différenciation successive ou simultanée possible**
Travail individuel	**Coopération au sein de groupes de besoin** **Pas de tutorat**	**Coopération au sein de groupes de besoin** **Tutorat dans la classe possible**	**Travail individuel**	**Coopération au sein de groupes de besoin** **Monitorat / Tutorat dans la classe possible**	**Travail individuel**

Coopération et séquences d'enseignement

Découverte

↓

Situation-problème

Confrontations

↓

institutionnalisation/formalisation des savoirs

(avec trace écrite collective issue de propositions d'élèves)

↓

Entraînements/systématisation

↓

Evaluation formative

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3
Soutien-remédiation		*Approfondissement*

↓

Evaluation sommative

Travail en groupe

Aide

Entraide

Tutorat

Approches

Vous trouverez dans cette pochette deux activités d'approche différenciées.

L'une d'entre elles se place dans le contexte des sciences physiques (refroidissement d'un corps) et conduit à l'utilisation de la méthode d'Euler.

L'autre se base sur les premiers termes du développement en série entière de l'exponentielle, permettant aux élèves de se faire une idée de ce que peut être une fonction qui est sa propre dérivée.

Ces deux activités sont là pour donner des idées concrètes de différenciations mais aussi pour être améliorées et critiquées !

Rituels

Voici une série de rituels :

A quels moments de l'année pouvez-vous les travailler avec vos élèves ?

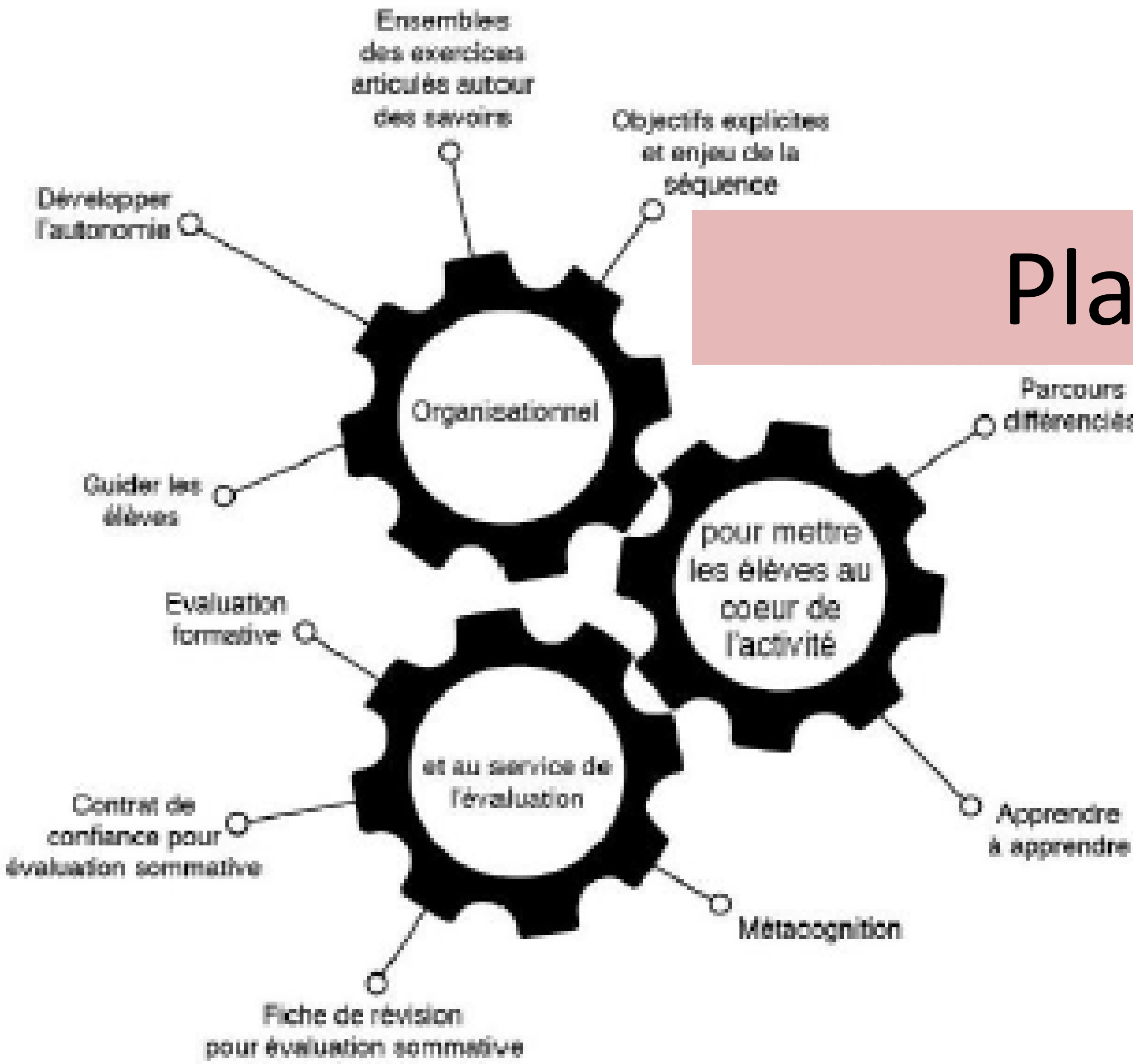
Quels niveaux de difficultés pouvez-vous noter pour les utiliser dans votre différenciation ?

Ces rituels sont des propositions : ils peuvent être modifiés, traités en partie seulement…

Dans la progression ci-jointe, insérer, en fonction des chapitres abordés, les numéros des rituels.

Vous pouvez « coder » vos rituels en fonction du niveau de difficulté (niveaux 1 à 3).

Plan de travail



Présentation d'un outil pédagogique permettant de personnaliser les apprentissages.

Le plan de travail pour redonner l'initiative aux élèves – Alexandre Balet, Geoffroy Laboudigue, Yannick Giordan. CAREP – Académie de Créteil

Coopération

Contenu :

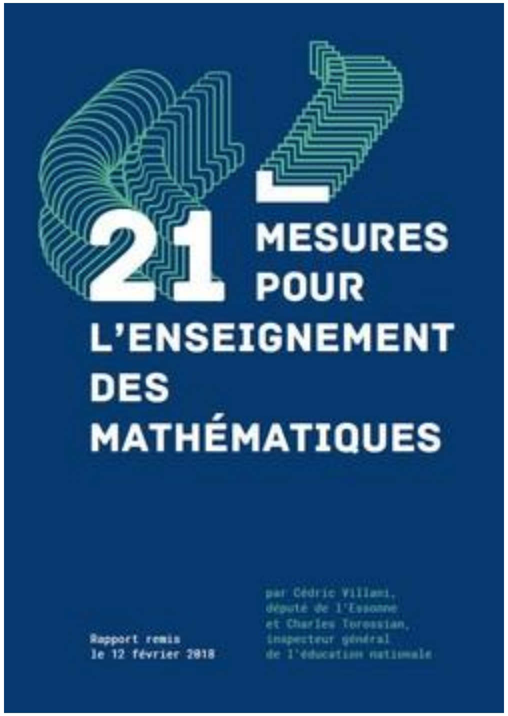
- Une activité « clé en main » : un problème différencié suivant trois niveaux de difficulté, avec deux propositions de scénario pour la mise en œuvre en travail de groupe.
- Un problème à différencier en plusieurs niveaux de difficulté.

Evaluation

Dans cette pochette vous trouverez :

- Un sujet de DM différencié clé en main avec son mode d’emploi et l’esprit de sa genèse

- Un début de DS proposé sous contrat de confiance, un article explicatif sous l’angle des sciences cognitives et un début de fiche de réussite



Le travail en équipe: une préconisation du rapport Villani Torossian

15

Développement professionnel en équipe

Développer la formation continue des professeurs de mathématiques à l'échelle locale, dans une logique de confiance, entre pairs et en équipe ; promouvoir l'observation conjointe ; dégager un temps commun dans les emplois du temps ; identifier les personnes ressources.

POUR L'ÉCOLE
DE LA CONFIANCE

académie
Lyon

RÉGION ACADÉMIQUE
AUVERGNE-RHÔNE-ALPES

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE