OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2020

SUJETS ACADEMIQUES

Exercice académique à traiter par tous les candidats

Problèmes d'isopérimétrie

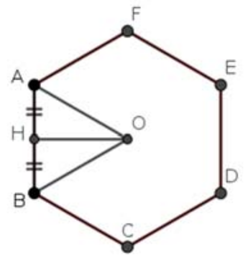
On définit le rapport isopérimétrique d'une figure fermée du plan comme étant le quotient du carré de son périmètre par son aire. Autrement dit, pour une figure de périmètre *P* et d'aire *A*, son rapport isopérimétrique est défini par $Q = \frac{P^2}{A}$.

Partie A

1. Étude des triangles équilatéraux.

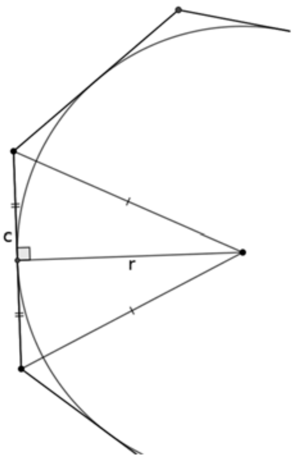
   a) Tracer un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est 4 cm et calculer son rapport isopérimétrique.

   b) Déterminer le rapport isopérimétrique d'un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est *c*. Vérifier que son expression ne dépend pas de *c*.
2. Donner l'expression du rapport isopérimétrique d'un carré dont la longueur des côtés est *c*.
3. On a tracé ci-contre un hexagone régulier de centre O et de côté de longueur *c*. Calculer son rapport isopérimétrique.
   Indication : l'hexagone est formé de 6 triangles équilatéraux.



Partie B

1. On considère un polygone régulier à *n* côtés de longueur *c* et on note *r* le rayon de son cercle inscrit. Exprimer l'aire, le périmètre et le rapport isopérimétrique de ce polygone en fonction de *c*, *r* et *n*.
2. En comparant l'aire du polygone régulier et l'aire du disque de rayon *r* inscrit dans ce polygone, établir l'inégalité $\frac{nc}{2} \geq \pi r$ et en déduire que $Q \geq 4\pi$.



Partie C

1. On s'intéresse à un triangle isocèle dont deux côtés sont de longueur *c* et le troisième est de longueur *2d*.

   a) Démontrer que $c > d$.

   b) Démontrer que son rapport isopérimétrique est égal à $Q = \frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}$.

   c) Montrer que pour *c=2d*, on a $Q = 12\sqrt{3}$.

   d) Démontrer que
   $$Q^2 - (12\sqrt{3})^2 = \frac{16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2)}{d^2(c^2-d^2)}.$$

   e) En déduire que le rapport isopérimétrique d'un triangle isocèle quelconque est toujours supérieur ou égal à celui de tout triangle équilatéral.
2. On considère un triangle quelconque *ABC*. On trace la droite (*d*) parallèle à (*AB*) passant par *C*, et on place un point *C'* sur (*d*).

   a) Démontrer que, quelle que soit la position du point *C'* sur (*d*), les triangles *ABC* et *ABC'* ont la même aire.

   b) Démontrer que, si *ABC'* est isocèle en *C'*, alors $AC + CB \geq AC' + BC'$.
   Indication : on pourra considérer le symétrique de *B* par rapport à (*d*).

   c) Déduire des questions précédentes que tous les triangles vérifient $Q \geq 12\sqrt{3}$, et donc $Q \geq 4\pi$.
3. Tracer un triangle de rapport isopérimétrique supérieur à 2020.

Exercice académique à traiter par les candidats de voie générale
ayant choisi la spécialité mathématiques

Les mendiants généreux

Un voyageur sans un sou en poche se promène dans une ville imaginaire et rencontre des mendiants.

Le premier mendiant lui demande 1€, le voyageur, navré, lui répond qu'il n'a aucun euro en poche.

Le mendiant lui dit alors : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 1€ ».

Le voyageur repart un peu confus et étonné d'avoir maintenant 1€ en poche. Il rencontre un 2ème mendiant qui lui demande 2€. Le voyageur, navré, lui dit qu'il n'a qu'un euro en poche, ce à quoi le mendiant répond : « ce n'est pas grave, dans ce cas, c'est moi qui te donne 2€ ».

Le voyageur poursuit son chemin avec 3€ en poche et rencontre un 3ème mendiant qui lui demande 3€. Ravi de les avoir, le voyageur lui donne les 3€ qu'il a en poche et continue son chemin sans argent.

Un peu plus loin, il rencontre un 4ème mendiant qui lui demande 4€…

L'histoire se poursuit ainsi : Lorsque le voyageur rencontre le n-ième mendiant, celui-ci lui demande n euros. Si le voyageur les possède, il les lui donne, sinon, c'est le mendiant qui les lui donne.

Pour tout entier n, avec $n \geq 0$, on appelle u_n la somme d'argent en euro, que possède le voyageur après avoir rencontré le n-ième mendiant. On a donc : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 0$.

On définit ainsi une suite (u_n).

1°) Donner les termes de la suite (u_n) pour n allant de 4 à 10.

2°) Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir les sommes d'argent, en euro, que possède le voyageur jusqu'au 50ème mendiant rencontré.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 2n$

4°) a) Démontrer que si $1 \leq u_n \leq n$ alors $u_{n+2} = u_n - 1$
b) Démontrer que si $n + 1 \leq u_n \leq 2n$ alors $u_{n+2} = u_n + 1$

5°) a) Démontrer que si $u_n = 0$ alors $u_{3n+3} = 0$
b) En utilisant le fait que $u_0 = 0$, trouver six autres termes de la suite (u_n) valant 0.

6°) On admet que pour tout $p \geq 1$, $S_p = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^p = \frac{3^{p+1}-3}{2}$
Démontrer que si $n = \frac{3^{p+1}-3}{2}$ avec p entier positif quelconque, alors $u_n = 0$

7°) a) Ecrire 1092 sous la forme d'une somme de puissances successives de 3.
b) En déduire la somme d'argent, en euro, possédée par le voyageur après avoir rencontré le 2020ème mendiant.

8°) En remarquant que $S_7 = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 = 3279$, déterminer un entier n tel que $u_n = 2020$.

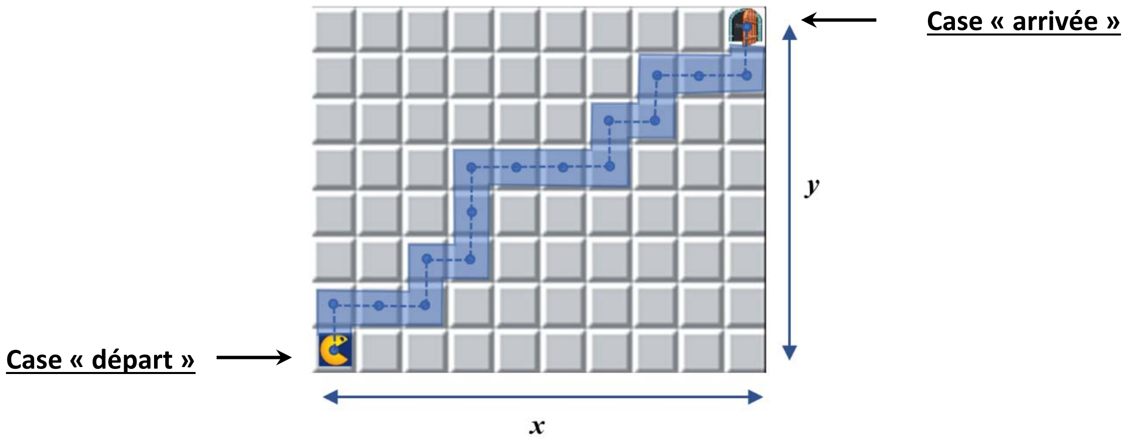
9°) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $u_{3n+1} = 3u_n + 1$.

Exercice académique à traiter par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques de voie générale

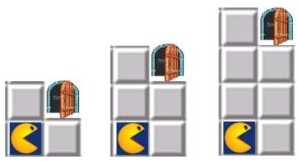
Problème « <u>Jeu vidéo</u> »

Un jeu vidéo est constitué d'une grille rectangulaire de x cases par y cases, x et y étant des entiers naturels non nuls (dans l'exemple d'illustration ci-dessous on a $x = 10$ et $y = 8$). Un personnage se trouvant en bas à gauche de la grille (case « départ ») doit rejoindre une porte située en haut à droite (case « arrivée ») en se déplaçant suivant deux directions : vers le haut ou vers la droite.

On appelle « chemin » l'ensemble des cases empruntées par le personnage (un exemple de chemin a été tracé ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier le nombre de chemins possibles entre la case de départ et la case d'arrivée, nombre que l'on notera C(x ; y).



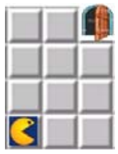
<u>1) Etude de premiers cas de C(x ; y) , $x \geq 1$ et $y \geq 1$</u> :



a. Soit y quelconque. Donner la valeur de C(1 ; y) .

b. Donner les valeurs de C(2 ; 2) ; C(2 ; 3) ; C(2 ; 4) .

Déterminer C(2 ; y) en fonction de y. Justifier la réponse.



c. Justifier que C(3 ; 4) = C(2 ; 4) + C(2 ; 3) + C(2 ; 2) + C(2 ; 1) puis calculer C(3 ; 4).

On rappelle que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Préciser C(3 ; y) en fonction de y (en justifiant)

d. Justifier que C(y ; x) = C(x ; y)

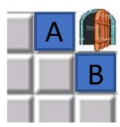
<u>2) Calcul de C(6 ; 6) :</u>

En considérant les chemins passant par les cases A, B, C, D, E ou F de la grille ci-contre :

a. Justifier que C(6 ; 6) = 2 [C²(1 ; 6) + C²(2 ; 5) + C²(3 ; 4)]

b. En déduire la valeur de C(6 ; 6)

<u>3) Détermination des C(x ; y) et application à une situation de jeu :</u>

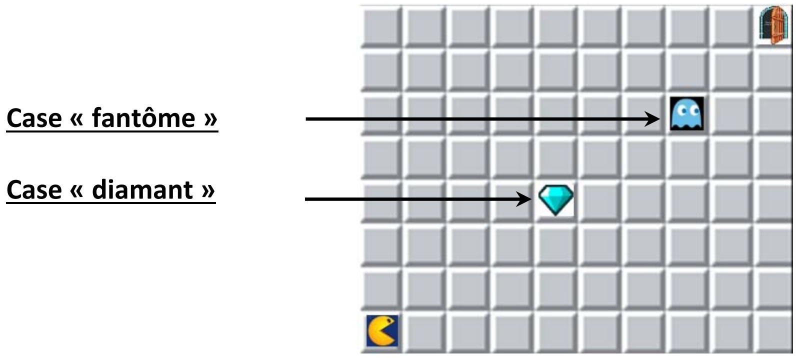


a. En considérant les chemins passant par les cases A et B adjacentes à la porte, montrer que C(x ; y) = C($x - 1$; y) + C(x ; $y - 1$)

b. Recopier et compléter alors le tableau des C(x ; y) ci-dessous :

6	1					
5	1					
4	1					
3	1					
2	1	2				
1	1	1	1	1	1	1
y / x	1	2	3	4	5	6

c. Application à une configuration de jeu :



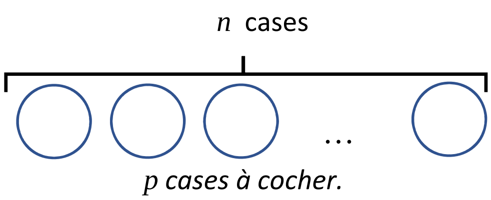
Le personnage doit rejoindre la case « arrivée » en passant par la case « diamant » et en évitant la case « fantôme ».

Calculer le nombre de chemins gagnants, c'est-à-dire respectant ces deux contraintes.

4) Recherche explicite des C(x ; y) :

Pour représenter un chemin, chaque déplacement d'une case vers le haut est noté **H** et chaque déplacement d'une case vers la droite est noté **D**.
Ainsi le chemin donné en exemple au début de l'énoncé est représenté par **H D D H D H H D D D H D H D D H .**

On admettra le résultat suivant :



Si on veut cocher p cases parmi n cases (avec $p < n$), le nombre de possibilités est égal à $\frac{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times n}{1\times2\times\ldots\times(n-p)}$,

ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

a. Justifier que C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ et en déduire que pour $y \geq 2$, on a C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de C(10 ; 8) puis déterminer la proportion du nombre de chemins gagnants de la question **3)** par rapport à la valeur C(10 ; 8) (arrondir le résultat à 10^{-4}).

c. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous permettant de calculer la valeur de C(x ; y) où x et y sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2 précisés par l'utilisateur et où C contiendra la valeur de C(x ; y).

$N \leftarrow 1$
$D \leftarrow 1$
Pour k allant de 0 à $y-2$
N ← N × (………..)
D ← D × (………)
C ← …