BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2019

MATHÉMATIQUES

Série : Sciences et Technologies de Laboratoire
Spécialité : BIOTECHNOLOGIES

ÉPREUVE DU MARDI 18 JUIN 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 4

L'usage de tout modèle de calculatrice, avec ou sans mode examen, est autorisé.

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (5 points)

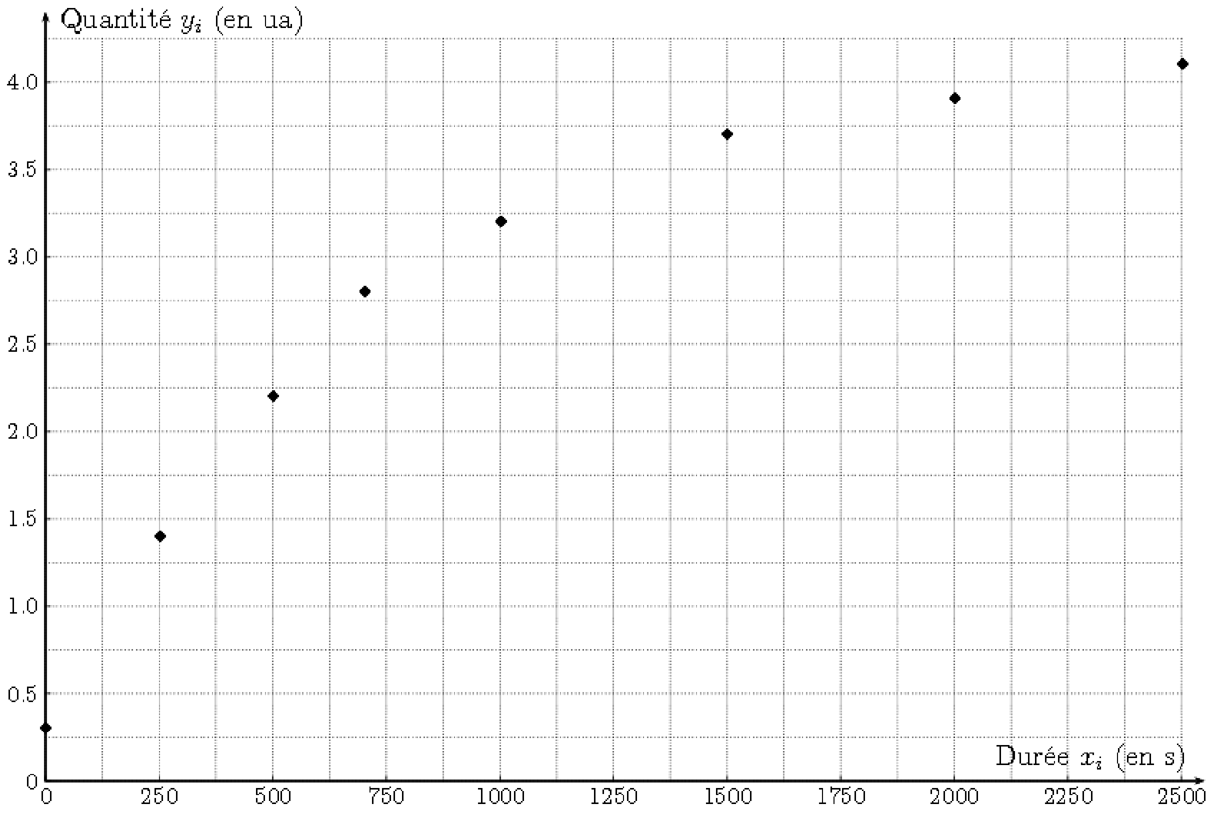
Dans une solution tampon (solution dont le pH varie peu ou ne varie pas lors de l'ajout d'un acide ou d'une base, ou lors d'une dilution), on introduit des levures (*saccharomyces cerevisiae*) en suspension. On ajoute ensuite une solution de glucose à 5 millimoles par litre (mmol.L^{-1}), et on suit la fermentation de glucose par les levures en relevant la quantité d'éthanol obtenue au cours du temps.

Le tableau ci-dessous donne la quantité y_i (exprimée en unité arbitraire, ua) d'éthanol dans la solution, en fonction de x_i qui représente la durée écoulée, en seconde, depuis l'ajout de glucose.

À chaque valeur de y_i, on associe $z_i = \dfrac{5,2}{5,2 - y_i}$.

Durée x_i (en s)	0	250	500	700	1000	1500	2000	2500
Quantité y_i (en ua)	0,3	1,4	2,2	2,8	3,2	3,7	3,9	4,1
$z_i = \dfrac{5,2}{5,2 - y_i}$	1,0612	1,3684	1,7333		2,6000	3,4667	4,0000	4,7272

On donne ci-dessous le nuage de points M_i, de coordonnées $(x_i ; y_i)$, dans un repère orthogonal du plan.



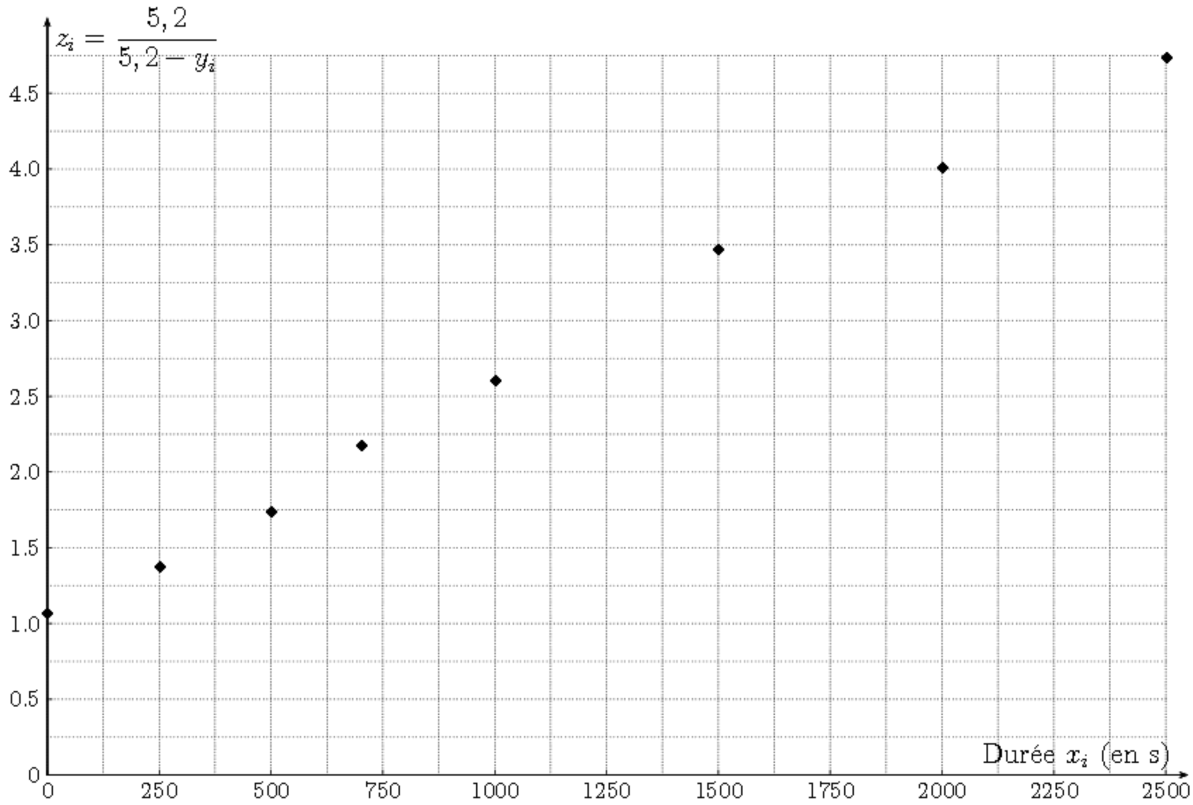
Pour chacune des cinq affirmations de l'exercice, déterminer si elle est vraie ou fausse, puis justifier de manière claire et concise la réponse donnée.

Affirmation 1 : Un ajustement affine du nuage de points $M_i\,(x_i ; y_i)$ est adapté.

Affirmation 2 : Au dix-millième près, la valeur manquante de z_i est $2,1667$.

Affirmation 3 : Lorsque la durée écoulée depuis l'introduction du glucose passe de 1000 à 2000 secondes, la quantité y d'éthanol augmente de plus de 25%.

On donne ci-dessous le nuage de points N_i, de coordonnées $(x_i ; z_i)$, dans un repère orthogonal du plan.



À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu, pour ce second nuage de points, l'ajustement affine suivant : $z = 0,0015x + 1,0627$.

Affirmation 4 : Grâce à l'ajustement affine donné, on peut estimer que $y = 5,2 - \dfrac{5,2}{0,0015x + 1,0627}$.

Affirmation 5 : En utilisant le modèle d'ajustement de l'affirmation précédente, on peut estimer que la quantité d'éthanol présente quarante minutes après l'introduction du glucose est supérieure à 4 ua.

EXERCICE 2 (6 points)

Julie a l'intention de planter des bambous dans son jardin. Comme ils sont réputés envahissants, elle souhaite d'abord avoir une estimation de leur taille et de la surface qu'ils occuperont dans les années à venir.

Un botaniste indique que l'espèce choisie par Julie a une hauteur qui augmente de 35% par an dans les conditions de son jardin. Il précise que ces bambous ont pour taille maximale 6 mètres. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur des bambous, exprimée en mètre, n années après les avoir plantés.

Dans les jardineries, ces plantes sont vendues alors que leur hauteur est de $0,6$ mètre, que l'on considérera comme la hauteur initiale.

1.a) Donner la valeur de h_0, puis calculer h_1.

b) Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n.

c) En déduire la nature de la suite (h_n), puis exprimer h_n en fonction de n.

d) Afin de ne pas gêner ses voisins, Julie envisage de ne pas laisser sa plantation dépasser 4 mètres de hauteur.

Combien d'années peut-elle laisser pousser ses bambous sans avoir besoin de les tailler ?

e) On donne ci-dessous trois algorithmes. Déterminer, sans justifier, celui des trois pour lequel, à la fin de son exécution, la variable N contient le résultat de la question précédente.

```
N ← 0
U ← 0,6
Tant que N < 4
|  N ← N + 1
|  U ← 1,35 × U
Fin Tant que
```

Algorithme 1

```
N ← 0
U ← 0,6
Tant que U < 4
|  N ← N + 1
|  U ← 1,35 × U
Fin Tant que
```

Algorithme 2

```
U ← 0,6
Pour N allant de 1 à 4
|  U ← 1,35 × U
Fin Pour
```

Algorithme 3

2. Julie n'a pas prévu d'installer de barrière anti-rhizomes, les bambous pourront donc se répandre sur le terrain. Selon le botaniste, la surface colonisée augmente de 2% par mois. Julie plante ses bambous sur une surface initiale de 1 m^2.

Au bout de combien de mois les bambous se seront-ils répandus sur une surface de plus de 2 m^2 ?

3. Julie se rend dans la jardinerie la plus proche de son domicile. Elle souhaite acheter des pots de bambous provenant d'une entreprise d'horticulture située à moins de cent kilomètres de cette jardinerie. On appelle C la condition :

« les pots ont été préparés à moins de 100 km de la jardinerie ».

Dans la jardinerie où Julie se trouve, une étude portant sur un échantillon de 200 pots montre que 135 d'entre eux ont été fournis par un horticulteur respectant la condition C.

a) Calculer la fréquence f, dans cet échantillon, des pots qui respectent la condition C.

b) Donner une estimation de p, la proportion des pots satisfaisant la condition C, par un intervalle de confiance à 95 %. Arrondir les bornes de cet intervalle à 10^{-2} près.

c) Julie recommandera cette jardinerie s'il est possible qu'au moins trois quarts des pots de bambous achetés vérifient la condition C.

Julie recommandera-t-elle cette jardinerie ?

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

On considère l'équation différentielle (E)

$$y' + 0,01y = 1$$

où y est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la fonction g solution de (E) vérifiant la condition $g(0) = 20$.

Partie B

L'objectif des questions suivantes est l'étude de la température de l'eau dans un chauffe-eau.

La mise en marche se fait de manière automatique chaque soir à 22h30 (heures creuses).

On note $g(t)$ la température de l'eau dans le chauffe-eau, exprimée en degré Celsius, t minutes après le déclenchement du mode « heures creuses ».

On considère que la fonction g est définie pour tout nombre réel de l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$g(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 100$$

1. Justifier par un calcul que la différence de température de l'eau du chauffe-eau entre 23h et minuit est comprise entre 26 et 27 degrés Celsius.

2.a) Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(t)$.

b) Étudier le signe de $g'(t)$, puis en déduire les variations de la fonction g.

Dans la suite de l'exercice, on admet que :

- la valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ est donnée par :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

- la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $G(t) = 8000\,\mathrm{e}^{-0,01t} + 100t$ est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3. Déterminer une valeur approchée, au dixième de degré près, de la température moyenne de l'eau dans le chauffe-eau entre 23h et minuit.
4. En réalité, le chauffe-eau est doté d'un système de régulation de la température afin que celle-ci ne dépasse par 60°C.

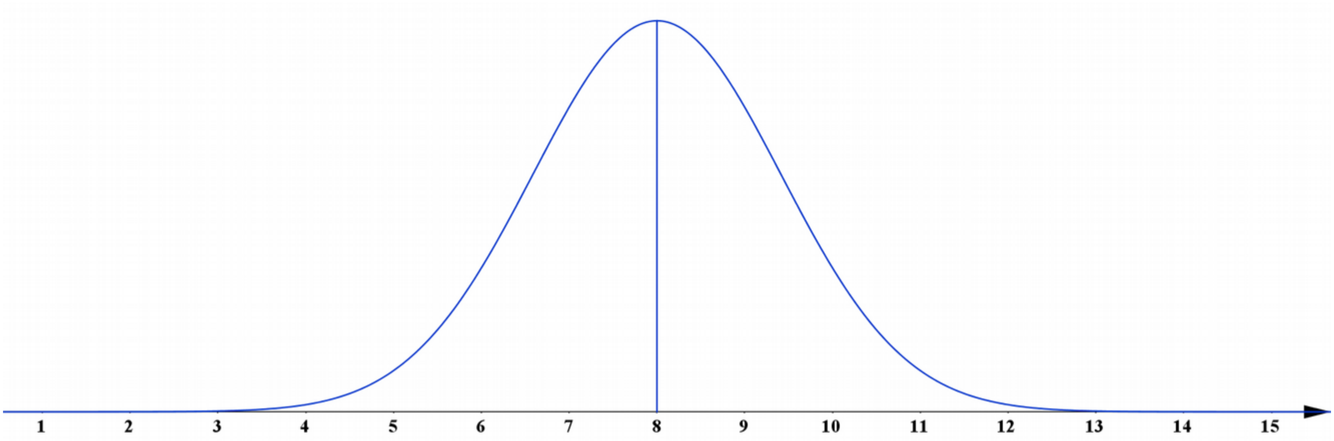
   Déterminer l'heure à laquelle l'eau du chauffe-eau atteint cette température de 60°C. *Arrondir la réponse à la minute près.*

EXERCICE 4 (3 points)

Dans une grande chaîne de magasins, la direction décide de recenser la durée d'attente en caisse de ses clients. On considère la variable aléatoire X qui, à un client pris au hasard dans l'ensemble des magasins, fait correspondre son temps d'attente exprimé en minute.

À partir de ces données, on considère que la variable aléatoire X suit une loi normale d'écart type 2.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction de densité correspondant à la loi suivie par la variable aléatoire X, obtenue à l'aide d'un logiciel.



1. La direction estime que l'attente est trop longue pour un client si elle est supérieure ou égale à dix minutes.
   Déterminer, au millième, la probabilité que, pour un client pris au hasard, la durée d'attente soit supérieure à cette période jugée trop longue.
2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel k vérifiant $P(X > k) = 0,1$.
   Interpréter ce résultat en termes de temps d'attente.