Olympiades nationales de mathématiques 2024

Sujet académique

Exercice 1 : Un problème de croisements

Au XX$^{\text{ème}}$ siècle en Europe, dans certaines mines, on conservait le minerai dans différents entrepôts de stockage en attendant de le vendre.

Les charges à transporter d'un entrepôt à un autre étant très lourdes, on les déplaçait dans des wagonnets qui roulaient sur des rails.

À cette époque, la technologie permettait le croisement de deux rails mais pas le croisement de trois rails en une même intersection.

Dans la modélisation de cette situation, on suppose que l'on peut toujours aller d'un entrepôt à un autre. De plus, deux entrepôts reliés par un chemin direct par des rails ne le sont qu'une seule fois.

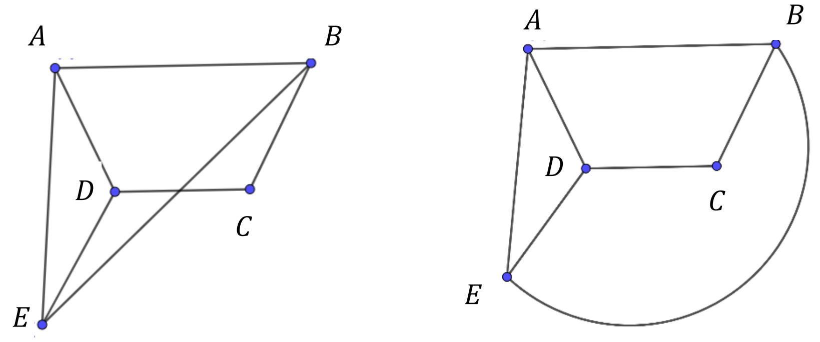
Un exemple de deux modélisations possibles pour un site comportant* $\mathbf{5}$ *entrepôts :

Chaque entrepôt est représenté par un **sommet** (nommés ici A, B, C, D et E) et les rails les reliant sont représentés par une **arête**.

Un **graphe** est un ensemble de sommets et d'arêtes.

On appelle s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes.

On a tracé ci-dessous deux représentations possibles pour un même graphe.



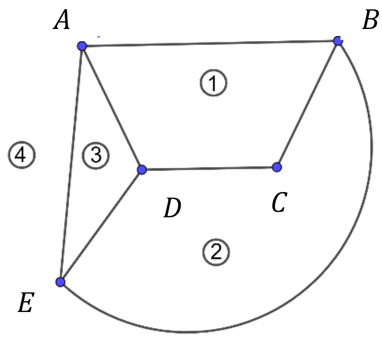
Ce graphe a sept arêtes, $a = 7$ et cinq sommets, $s = 5$.

Partie 1 : Sans croisement de rail

Dans la mine, les croisements posaient problème car ils provoquaient des déraillements qui faisaient tomber les charges, ce qui donnait du travail supplémentaire et faisait perdre du temps.

Dans cette partie, on étudie les situations dans lesquelles on peut éviter les croisements de rails.

On définit un **graphe planaire** comme un graphe qui a une représentation dans le plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.



Dans ce cas, les arêtes du graphe découpent le plan en plusieurs régions.

Par exemple, le graphe précédent est planaire,
il découpe le plan en 4 régions, on notera $r = 4$.

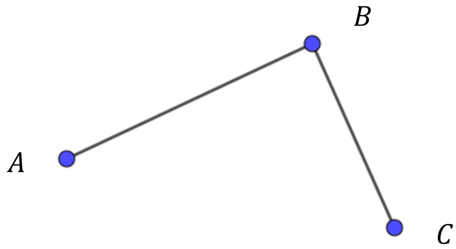
1- Tracer des graphes planaires à 1 sommet, à 2 sommets, à 3 sommets, à 4 sommets et à 5 sommets.

2- Le but de cette question est de prouver que tout graphe planaire vérifie la relation d'Euler :

$$s + r - a = 2$$

a- Vérifier que le graphe à 1 sommet vérifie la relation d'Euler.

b- On considère le graphe planaire suivant qui vérifie la relation d'Euler.



Si on ajoute une arête, deux situations se présentent.
Sur votre copie, faire une illustration de chacune de ces situations puis vérifier que chacun des graphes planaires obtenus satisfait la relation d'Euler.

c- Conclure que la relation d'Euler est vraie pour tout graphe planaire.

3- Justifier que pour tout graphe planaire ayant 3 sommets ou plus, $r \leq \frac{2}{3}a$

4- En déduire que pour tout graphe planaire ayant plus de 3 sommets,

$$2 - s + \frac{a}{3} \leq 0 \qquad \textit{(relation (2))}$$

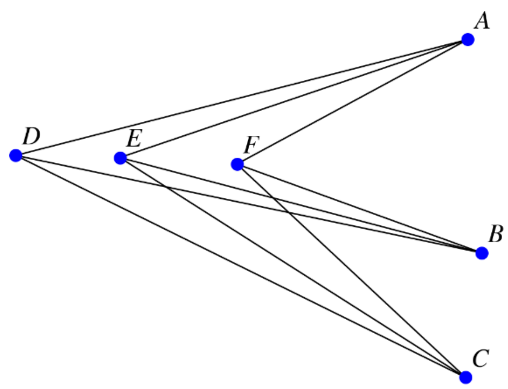
Partie 2 : avec croisement de rail

Le but de cette partie est d'améliorer la productivité en minimisant le nombre de croisements.

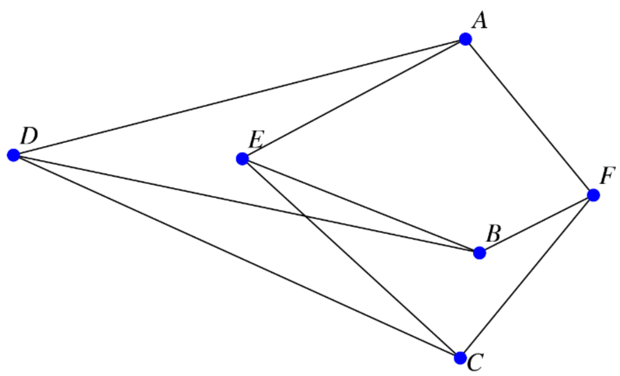
On appellera **nombre de croisements** d'un graphe G, noté $Cr(G)$, le nombre minimum de points d'intersection des arêtes dans toute représentation du graphe.

Ainsi, dans cette partie, les graphes ne sont pas nécessairement planaires.

Par exemple, si on considère le graphe G suivant :



Une représentation de G avec un minimum de croisement est :

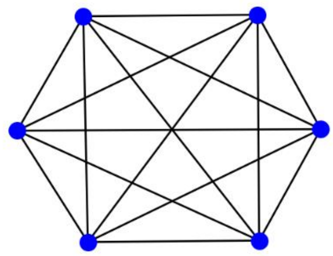


Donc $Cr(G) = 1$

Lorsque tous les entrepôts sont reliés **directement** entre eux, le graphe représentant la situation s'appelle **un graphe complet.**

Pour n un entier naturel non nul, noté $n \in \mathbb{N}^*$, un graphe complet à n sommets est donc un graphe dont chaque sommet est relié à tous les autres. On le note K_n.

Ci-contre, on a représenté le graphe complet K_6.



5- **a-** Tracer une représentation des graphes complets K_1, K_2, K_3, K_4 et K_5.

b- Déterminer $Cr(K_1), Cr(K_2), Cr(K_3)$ et $Cr(K_4)$.

6- **a-** En utilisant la *relation (2),* prouver que le graphe complet K_5 n'est pas un graphe planaire.

b- Déterminer $Cr(K_5)$ (vous pourrez vous aider d'une représentation du graphe complet K_5).

7- Considérons le graphe complet à n sommets K_n , $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire n est un entier naturel non nul.

a- Déterminer en justifiant le nombre d'arêtes du graphe complet K_n , $n \in \mathbb{N}^*$.

b- On représente le graphe complet K_n , $n \in \mathbb{N}^*$, avec un nombre minimum de croisements.

On construit un nouveau graphe planaire G_n , $n \in \mathbb{N}^*$, de la manière suivante :

- ses sommets sont ceux de K_n auxquels on ajoute un sommet pour chaque croisement de K_n ;
- les arêtes de K_n sans croisement sont conservées ;
- les arêtes de K_n qui se croisent sont coupées à chaque croisement.

Quel est le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe planaire G_n , $n \in \mathbb{N}^*$?

c- Appliquer la *relation (2)* au graphe planaire G_n , $n \in \mathbb{N}^*$, et justifier que

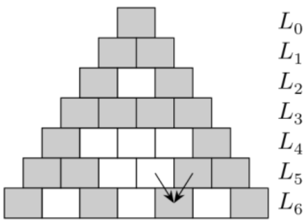
$$Cr(K_n) \geq \frac{n^2 - 7n + 12}{2}$$

d- Déterminer $Cr(K_6)$ et tracer une représentation de K_6 avec $Cr(K_6)$ croisements.

e- Pouvez-vous déterminer avec certitude $Cr(K_7)$?

Tracer une représentation de K_7 qui permet d'approcher au mieux $Cr(K_7)$.

Exercice 2 : Pyramide de cellules grises



On considère une pyramide infinie construite en superposant des cellules en quinconce selon les règles suivantes:

- La ligne du haut possède une seule cellule grise.
- Chaque ligne suivante possède une cellule de plus que celle située juste au-dessus.
- Les cellules aux extrémités des lignes sont grises.
- Une cellule surplombée par deux cellules de même couleur est blanche; sinon elle est grise.

Notations :
La première ligne est notée L_0, la seconde L_1 et ainsi de suite. On numérote aussi les cellules de gauche à droite dans une ligne: $L_n[0]$ est la couleur de la première cellule, suivie de $L_n[1]$ jusqu'à $L_n[n]$.

Exemples:
$L_0[0]$ = gris (la cellule au sommet est grise). $L_6[4]$ = gris car $L_5[3] \neq L_5[4]$; une interprétation de ce résultat est représentée dans la pyramide ci-dessus par deux flèches qui vont de la ligne L_5

à la ligne L_6.

Partie 1 : Premiers exemples

1. a) Sans justifier, compléter jusqu'à la ligne L_{10} la pyramide de l'annexe 1 avec les couleurs suivant les règles précédentes.

b) Donner la valeur de $L_9[4]$. Justifier en entourant la cellule correspondante dans l'annexe 1.

2. Les trois premières lignes entièrement grises de la pyramide sont L_0, L_1 et L_3. Déterminer le plus petit entier $n \geq 5$ tel que L_n soit entièrement grise. Aucune justification n'est attendue.

3. Dans la fonction ci-contre, L est la liste des couleurs d'une ligne L_n, en représentant le blanc par 0 et le gris par 1.
La deuxième ligne de l'algorithme calcule n à partir du nombre **len**(L) de cellules dans la liste, tandis que la troisième ligne prépare une liste S avec un emplacement de plus pour représenter L_{n+1}.
Enfin, la quatrième ligne remplit S[0] et S[n+1] avec le nombre 1 puisque les extrémités de L_{n+1} sont grises.
Sur l'annexe 2, compléter l'algorithme pour que la fonction renvoie la liste S des couleurs de la ligne L_{n+1}.

```
1 def suivante(L):
2     n = len(L) - 1
3     S = [None] * (n+2)
4     S[0] = S[n+1] = 1
5     for k in range(n):
6         if L[...] == L[...]:
7             S[...] = ...
8         else:
9             ...
10    return ...
```

Partie 2 : Couleur et parité

4. On obtient L_6 en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_3. On obtient L_5 en dédoublant chaque cellule de L_2.
Ces constructions se retrouvent ailleurs dans la pyramide. Donner deux exemples de chaque cas.

5. Soit n un entier quelconque tel que $n \geq 1$. On peut représenter $L_n = \boxed{c_0}\boxed{c_1}\boxed{c_2}\cdots\boxed{c_{n-1}}\boxed{c_n}$ où c_k est la couleur de la cellule correspondante: $c_k = L_n[k]$ pour $0 \leq k \leq n$.
Dans cette question on suppose que L_{2n} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_n.

a) Représenter L_{2n} et L_{2n+1} avec les bonnes informations de couleur.

b) Démontrer que L_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

c) Démontrer que L_{2n+2} s'obtient en intercalant une cellule blanche entre chaque paire de cellules consécutives de L_{n+1}.

6. Démontrer que pour tout entier naturel n, la ligne L_{2n} s'obtient en intercalant des cellules blanches entre les cellules de L_n et que la ligne L_{2n+1} s'obtient en dédoublant chaque cellule de L_n.

On a ainsi démontré que pour tous entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$:

$$L_{2n}[2k] = L_n[k] \qquad L_{2n}[2k+1] = \text{blanc}$$
$$L_{2n+1}[2k] = L_n[k] \quad L_{2n+1}[2k+1] = L_n[k]$$

Partie 3 : Écriture binaire

Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe une unique décomposition

$$n = n_a \times 2^a + n_{a-1} \times 2^{a-1} + \cdots + n_3 \times 2^3 + n_2 \times 2^2 + n_1 \times 2^1 + n_0$$

avec $n_i \in \{0; 1\}$ pour tout i entier naturel entre 0 et a. On l'appelle **écriture binaire** de n et on la note $(n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$.

Par exemple, $5 = (101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $32 = (10000)_2 = 2^4$ et

$$31 = (1111)_2 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1.$$

7. **a)** Donner les écritures binaires des entiers de 0 à 6 inclus.
b) Donner l'écriture décimale (habituelle) des entiers $(10101)_2$ et $(1010)_2$.

Si n et k sont deux nombres entiers naturels on dit que n **domine** k si chaque chiffre de l'écriture binaire de n est supérieur ou égal au chiffre de même position dans l'écriture binaire de k.

8. **a)** Déterminer si 5 domine 3 en justifiant.
b) Compléter sans justifier le tableau de l'annexe 3.
c) Conjecturer une règle permettant de déterminer la couleur $L_n[k]$ pour tous les entiers n et k tels que $0 \leq k \leq n$.

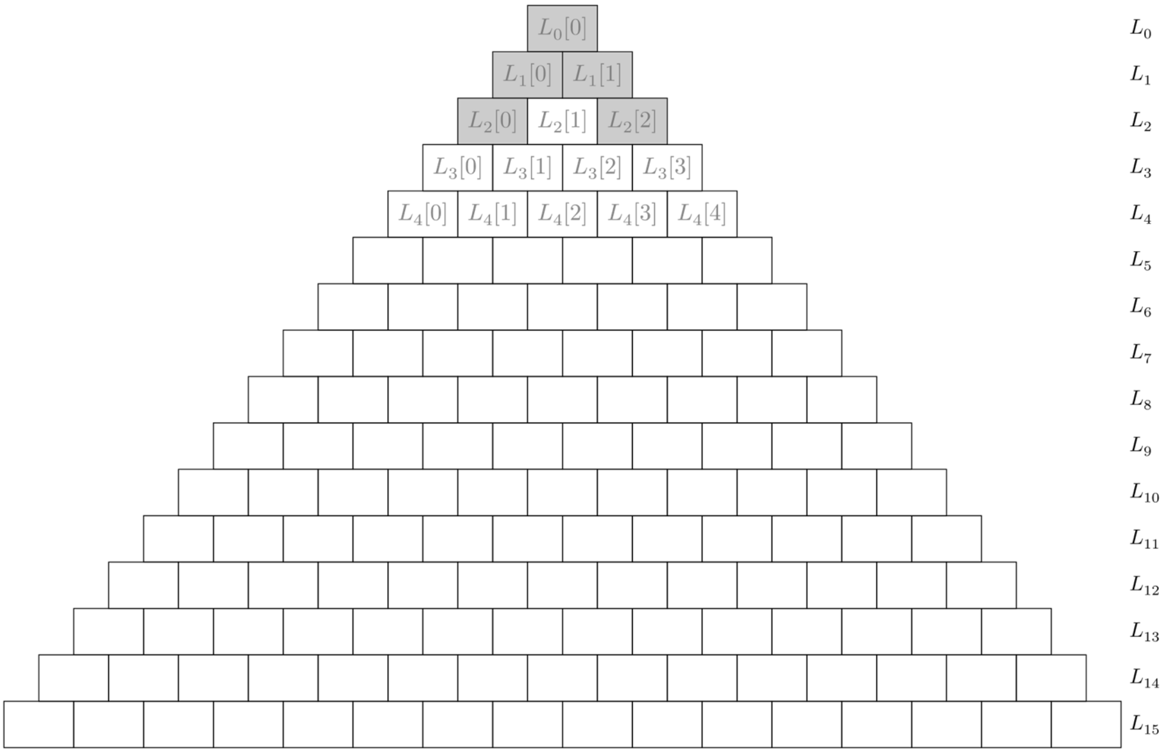
Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
Notons $n = (n_a n_{a-1} \dots n_3 n_2 n_1 n_0)_2$ et $k = (k_b k_{b-1} \dots k_3 k_2 k_1 k_0)_2$ les écritures binaires de n et k. On considère que $k_i = 0$ si $b < i \leq a$ ce qui revient à ajouter des chiffres zéro à gauche de l'écriture de k pour qu'il ait autant de chiffres que n. On conservera ces notations dans tout le reste de l'exercice.

9. Démontrer que $L_n[k] =$ gris si et seulement si n domine k.

10. **a)** On souhaite savoir quelles lignes de la pyramide sont entièrement grises. Conjecturer une propriété caractéristique et démontrer cette conjecture.
b) On souhaite savoir quelles lignes de la pyramide sont entièrement blanches à l'exception des cellules des extrémités. Conjecturer une propriété caractéristique et démontrer cette conjecture.

11. Démontrer que le nombre de cellules grises de la ligne L_n est 2^s où s est le nombre de 1 dans l'écriture binaire de n.

Annexe 1



Annexe 2

```python
def suivante(L):
    n = len(L) - 1
    S = [None] * (n+2)
    S[0] = S[n+1] = 1
    for k in range(n+1):
        if L[...] == L[...]:
            S[...] = ...
        else:
            ...
    return ...
```

Annexe 3

n	1	5	5	6	6	6
k	0	1	3	4	3	2
Écriture binaire de n	$(1)_2$	$(101)_2$	$(101)_2$			
Écriture biraire de k	$(0)_2$	$(001)_2$				
n domine k	vrai	vrai				
$L_n[k]$	gris					