Académie de Lyon

TraAM 2014-2015 :

Développer avec les TICE l'appétence des élèves pour la résolution de problèmes en mathématiques

Séquence

Sauts de grenouilles

Première

Groupe académique

Dominique Bernard
Jean-Louis Bonnafet
Daniel Di Fazio
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

Sauts de grenouilles

http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article420&lang=fr

PRESENTATION

A partir d'une vidéo, construire un énoncé d'exercice de probabilités et le résoudre.

Thèmes : probabilités, algorithmique

Niveau : première S

Compétences travaillées :

Chercher : analyser un problème.
Modéliser : traduire à l'aide de lois de probabilités une situation réelle, élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation.
Représenter : choisir un cadre géométrique puis numérique pour traiter le problème, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre.
Calculer : mettre en œuvre un algorithme.
Raisonner
Communiquer

OBJECTIFS

Modéliser.
Utiliser des arguments géométriques pour calculer des probabilités.
Utiliser un algorithme pour conjecturer un résultat ne pouvant être démontré au niveau lycée.
Faire émerger un apparent paradoxe : si la distance moyenne parcourue en deux sauts est bien de un mètre, le nombre moyen de sauts nécessaires pour atteindre un mètre est strictement supérieur à 2. (Il est ici égal à *e*).

SCENARIO

Matériel : video grenouille

Place dans la progression : après avoir traité le chapitre de probabilités et après avoir effectué plusieurs simulations sur tableur, calculatrice, Algobox…

Ce qui a été proposé avant :

1) Modélisation du jeu « le lièvre et la tortue »
2) Activité marche de l'ivrogne en salle informatique, terminé en devoir maison.

Modélisation d'une marche aléatoire à 20 pas ; réinvestissement de la loi binominale, algorithme et boucle « pour ».

Énoncé du problème :

Première approche : en classe entière, projection de la vidéo, ¼ heure en fin de cours.

Après avoir regardé la ou les vidéos, quel problème peut-on imaginer et poser ? http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article420&lang=fr

Des élèves ont rapidement proposé de rechercher le nombre moyen de sauts pour dépasser la longueur du banc et certains ont proposé de calculer la longueur moyenne des trajectoires. Collecte d'hypothèses sur la longueur de la table et des sauts.

Enoncé proposé en devoir maison :

Sauts de grenouilles 1°S http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/spip.php?article420&lang=fr Travail en groupes (2 ou 3 élèves) souhaité.	

Une grenouille veut rejoindre une mare située à un mètre devant elle ; elle effectue pour l'atteindre des sauts supposés en ligne droite de longueur aléatoire entre 0 et 1 mètre, avec répartition uniforme sur $[0 ; 1[$.

1. Quelle est la longueur moyenne parcourue par la grenouille en un saut ? En deux sauts ?
2. Quelle est la probabilité que la grenouille atteigne la mare au premier saut ?
3. On cherche à déterminer la **probabilité que la grenouille atteigne la mare au deuxième saut** ?
   a. Simuler par la méthode de votre choix (programme sur Algobox, calculatrice, tableur ou avec un langage de votre choix…) un grand nombre de trajectoires de grenouille et déterminer à quelle fréquence la grenouille atteint la mare en deux sauts.
   b. Peut-on **estimer** la probabilité cherchée ?
   c. Peut-on déterminer cette probabilité ?
4. *Question facultative* : On cherche à déterminer la probabilité que la grenouille atteigne la mare au troisième saut ? Estimer cette probabilité en effectuant plusieurs simulations.
5. On cherche à déterminer le **nombre moyen de sauts** nécessaires à la grenouille pour atteindre la mare. Créer un algorithme pour simuler n trajectoires jusqu'à la mare et **estimer** ce nombre moyen de sauts.

RETOUR D'EXPERIENCE

TRAVAUX DES ELEVES : partie algorithmes

Certains élèves ont voulu vérifier que la longueur moyenne d'un saut est 0,5 m ou commencent par chercher le nombre de sauts d'une trajectoire et sa longueur.

Les difficultés rencontrées dans l'écriture des algorithmes:

Initialisation des variables : Comment initialiser les variables ?

```
DEBUT_ALGORITHME
    L PREND_LA_VALEUR random()        ←  initialisation avec un pas en
    P PREND_LA_VALEUR 1               ← dehors de la boucle
    TANT_QUE (L<=1) FAIRE
        L PREND_LA_VALEUR L+random()
        P PREND_LA_VALEUR P+1
        FIN_TANT_QUE
    AFFICHER "La longueur du trajet parcourue par la grenouille est de "
    AFFICHER L
    AFFICHER " mètres"
    AFFICHER "Elle a effectué son trajet en "
    AFFICHER P
    AFFICHER " sauts"
FIN_ALGORITHME
```

Initialisation des variables : des variables et des initialisations inutiles avant affectations.

```
DEBUT_ALGORITHME
    LIRE N
     R PREND_LA_VALEUR 0
    POUR I ALLANT_DE 1 A N
        DEBUT_POUR
        S PREND_LA_VALEUR 0                  ← ??
        D PREND_LA_VALEUR 0                  ← ??
        S PREND_LA_VALEUR random()
        D PREND_LA_VALEUR random()
         K PREND_LA_VALEUR S+D               ← Il y a plus simple !!
        SI (K>=1) ALORS
            DEBUT_SI
            R PREND_LA_VALEUR R+1
            FIN_SI
        FIN_POUR
    R PREND_LA_VALEUR R/N
    AFFICHER "P="
    AFFICHER R
    FIN_ALGORITHME
```

Simulation de trajectoires à deux pas :

erreurs multiples

utilisation de **2*random() au lieu de random() + random()**
Incrémentation du compteur à l'intérieur d'une boucle Pour

```
DEBUT_ALGORITHME
    N PREND_LA_VALEUR 0
    S PREND_LA_VALEUR 0                      ← Initialisation hors boucle ?
    LIRE K
    POUR I ALLANT_DE 0 A K                   ← K+1 simulations ?
        DEBUT_POUR
        S PREND_LA_VALEUR S+2*random()       ← 2*random() équivaut à random() + random() ??
        SI (S>=1) ALORS
            DEBUT_SI
            N PREND_LA_VALEUR N+1
            FIN_SI
        I PREND_LA_VALEUR I+1                ← une étape sur deux ?
        FIN_POUR
    N PREND_LA_VALEUR N/K
    AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

Dans ce cas, les élèves trouvent une fréquence autour de 0,5 puisque S est rapidement supérieur à 1 et qu'ils ne comptent qu'une trajectoire sur deux !

Algorithme correct mais avec des conditions imbriquées : à simplifier !

```
DEBUT_ALGORITHME
    V PREND_LA_VALEUR 0
    G PREND_LA_VALEUR 0
    K PREND_LA_VALEUR 0
    AFFICHER "Entrer N, le nombre de trajectoires choisi : "
    LIRE N
    POUR I ALLANT_DE 1 A N
        DEBUT_POUR
        Saut1 PREND_LA_VALEUR random()
        Saut2 PREND_LA_VALEUR random()
        Saut3 PREND_LA_VALEUR random()
        L PREND_LA_VALEUR Saut1+Saut2
        SI (L<1) ALORS                       ← A simplifier !
            DEBUT_SI
            SI ((Saut1+Saut2+Saut3)>=1) ALORS
                DEBUT_SI
                V PREND_LA_VALEUR V+1
                FIN_SI
            FIN_SI
        SI (L>=1) ALORS
            DEBUT_SI
```

```
                        G PREND_LA_VALEUR G+1
                        FIN_SI
                FIN_POUR
            Z PREND_LA_VALEUR G/N
            K PREND_LA_VALEUR V/N
        AFFICHER "La fréquence d'atteinte de la mare au deuxième saut est : f(2)="
        AFFICHER Z
AFFICHER "La fréquence d'atteinte de la mare au troisième saut est : f(3)="
AFFICHER K
FIN_ALGORITHME
```

Recherche du nombre moyen de sauts

Pour certains, un nombre moyen de sauts ne peut-être qu'un entier :

```
q PREND_LA_VALEUR round(q/n)
AFFICHER "Nombre moyen de sauts : "
AFFICHER q
```

Des algorithmes dont on se demande à quoi ils servent… ;

```
    VARIABLES
        l EST_DU_TYPE NOMBRE
        k EST_DU_TYPE NOMBRE
        n EST_DU_TYPE NOMBRE
    DEBUT_ALGORITHME
        n PREND_LA_VALEUR 0
        TANT_QUE (n<100) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
            k PREND_LA_VALEUR 0
            TANT_QUE (l<1) FAIRE                  ←  Initialisation de l ?
                DEBUT_TANT_QUE
                l PREND_LA_VALEUR random()+1
                k PREND_LA_VALEUR k+1
                AFFICHER l                        ← Intérêt d'afficher l ?
            FIN_TANT_QUE
        AFFICHER k                                ← Que faire de k ?
        n PREND_LA_VALEUR n+1
        l PREND_LA_VALEUR 0                       ←  Ici l'initialisation de l ?
        FIN_TANT_QUE
    FIN_ALGORITHME
```

Algorithmes difficiles à lire et comprendre :

Où est initialisé somme_sauts ?
Que font saut ? nbr_sauts ? somme_sauts ?

```
    DEBUT_ALGORITHME
        LIRE k
        POUR i ALLANT_DE 1 A k
```

```
                    DEBUT_POUR
                     nbr_sauts PREND_LA_VALEUR 0
                    saut PREND_LA_VALEUR random()        ← un saut hors boucle ?
                    TANT_QUE (saut<=1) FAIRE
                    DEBUT_TANT_QUE
                            nbr_sauts PREND_LA_VALEUR nbr_sauts+1
                            saut PREND_LA_VALEUR saut+random()
                             somme_sauts PREND_LA_VALEUR nbr_sauts+somme_sauts
                            SI (saut>=1) ALORS
                                    DEBUT_SI
                                    AFFICHER nbr_sauts        ← Est-ce utile ?
                                    FIN_SI
                            FIN_TANT_QUE
                    FIN_POUR
            moyenne PREND_LA_VALEUR somme_sauts/k
            AFFICHER "le nombre de sauts moyen est "
            AFFICHER moyenne
    FIN_ALGORITHME
```

Algorithme simple et efficace

```
    DEBUT_ALGORITHME
            b PREND_LA_VALEUR 0
            LIRE n
            POUR i ALLANT_DE 1 A n
                    DEBUT_POUR
                    k PREND_LA_VALEUR 0
                    a PREND_LA_VALEUR 0
                    TANT_QUE (a<1) FAIRE
                            DEBUT_TANT_QUE
                            a PREND_LA_VALEUR a+random()
                            k PREND_LA_VALEUR k+1
                            FIN_TANT_QUE
                    b PREND_LA_VALEUR b+k
                    FIN_POUR
            c PREND_LA_VALEUR b/n
            AFFICHER c
    FIN_ALGORITHME
```

Utilisation du tableur Pour les fréquences de trajectoires à 2 ou 3 sauts !

Somme saut 1 + 2	Somme saut 1+2+3	Réussite 2ème saut	Réussite 3ème saut
0,77166785	0,98362807	0	0
1,12778505	1,38921323	1	0
0,43038320	0,59603340	0	0
0,915324	1,278043	0	1

58	26				
0,143333	0,800177				
62	66	0	0	Probabilité de réussite au 3ème saut	0,35
0,234907	1,116443				
28	26	0	1		
1,266074	1,609829				
41	68	1	0		
0,935757	1,173627				
35	40	0	1		
1,428649	1,669607				
44	39	1	0		

Démonstrations ?? Recherche des probabilités d'atteindre la mare en deux sauts:

tentative d'utilisation des intervalles de confiance :

Nous avons calculé la fréquence pour laquelle la grenouille atteint la marre en deux sauts précédemment. A partir de cela, nous pouvons estimer la probabilité. En effet celle-ci appartiendra à l'intervalle de confiance :

$[(f-1/\sqrt{n})\ ;\ f+1/\sqrt{n})]=[(0,49+1/\sqrt{500})\ ;\ 0,49+1/\sqrt{500})]=[0.45\ ;\ 0.53]$

c)Cependant on ne peut pas déterminer la probabilité mais seulement l'estimer. En effet il y a toujours un risque d'erreur. Ici il est de 5%.

Avec problème de notation de $\sqrt{n}$ …

Q3°

Total	502
Fréquence	0,502

a) **La fréquence moyenne à laquelle la grenouille atteint la marre en 2 sauts est f=0,500 (cf : N3).**

b) **Grâce à la fréquence, on peut en effet estimer la probabilité cherchée sur un intervalle I :**
P € [f- 1/n-1 ; f+1/n-1]
avec f = 0,5 et n = 1000
I = [0,468 ; 0,532]

c) **On peut déterminer cette probabilité uniquement sur un intervalle car l'échantillon n'est pas représentatif de la population à 100 %**

Les tentatives de démonstration : raisonnements incorrects

Sous-question b.

Grâce aux simulations précédentes, nous avons déterminé à quelle fréquence la grenouille atteint la mare en deux sauts : environ 0,5. Nous pouvons donc estimer la probabilité « p » que la grenouille atteigne la mare en deux sauts à **p≈0,5**.

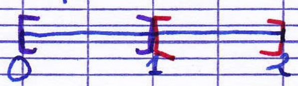
Sous-question c.

On peut déterminer cette probabilité. En effet, la longueur d'un saut est aléatoire : elle varie entre 0 et 1 mètre, avec répartition uniforme sur l'intervalle [0;1[. D'où, la longueur parcourue après deux sauts appartient à l'intervalle [0;2[. Or, pour atteindre la mare, la longueur parcourue doit être supérieure ou égale à 1, et donc être comprise dans l'intervalle [1;2[: étant donné qu'il y a répartition uniforme, l'intervalle [1;2[étant la moité de l'intervalle [0;2[, on peut déterminer que la probabilité « p » que la grenouille atteigne la mare en deux sauts est **p=1/2=0,5**.

Ou encore

c) Deux sauts sont compris dans l'intervalle [0 ; 2[. Or, il faut que ce soit compris dans l'intervalle [1 ; 2[pour que la grenouille atteigne la mare. [1 ; 2[étant la moitie de l'intervalle [0 ; 2[, la probabilité que la grenouille atteigne la mare en deux sauts est 1/2.

c) Oui, nous pouvons déterminer la probabilité que la grenouille atteigne la mare au deuxième saut. En effet, le total des deux sauts se trouve dans l'intervalle [0; 2]. Or, pour atteindre la mare, il faut se trouver dans l'intervalle [1; 2].
On peut ainsi décomposer cet intervalle en 2:



l'intervalle [0; 1[et celui [1; 2].
Ainsi, on peut supposer que nous avons $\frac{1}{2}$ chance d'être

Dans l'intervalle [1 ;2[donc P(« deuxième saut ») = ½.

__**Restitution en classe entière : 1 heure**__

Question 1 : Est-ce que ALEA() + ALEA() a la même distribution que 2*ALEA() ?
La question a perturbé les élèves... silence ;
J'ai commencé dans la cas discret de la somme de deux dés parfaitement équilibrés : la loi de la somme n'est pas uniforme...
Puis dans le cas continu, nous avons étudié pour x et y dans [0;1] comment représenter graphiquement les solutions de x + y = k avec k donné dans [0;2] puis nous avons observé que les segments solutions n'ont pas tous la même longueur.

Question2 : Comment prouver que P(X + Y >1) = ½ ?
A partir du support géométrique construit précédemment, les élèves ont facilement conclu.

BILAN

Les élèves sont facilement rentrés dans la phase de modélisation. Les algorithmes écrits étaient bien différents donc le travail personnel. Mais la correction fut longue !
Cette activité a permis de révéler les conceptions des élèves, de les questionner sur les implicites.
Le fait que la distribution de 2*ALEA() ne soit pas la même que celle de ALEA()+ALEA() a bien marqué les esprits . Le résultat sur le nombre moyen de sauts (ils ont trouvé 2,7) ne les a pas particulièrement interpelés. Ce même résultat en terminale aurait sans doute plus d'écho !
Cette activité permet de décloisonner les différents chapitres probabilités et géométrie… mais la plupart des résultats ne peuvent être démontrés au lycée.

En complément : le paradoxe des grenouilles http://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article791