

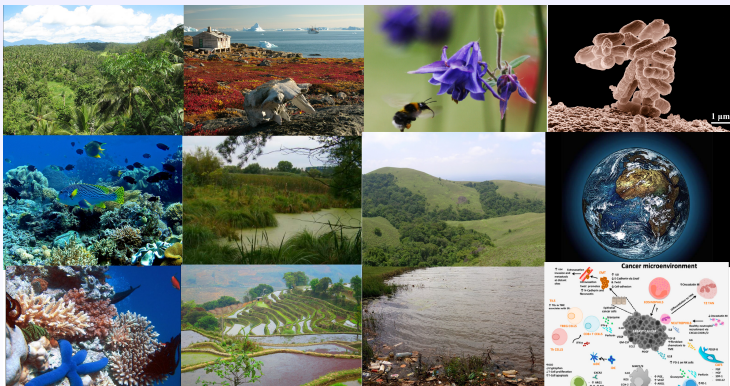
Mathématiques et Biodiversité : Décrypter les Écosystèmes

Hélène Leman (INRIA, ENS Lyon)

28/05/2025

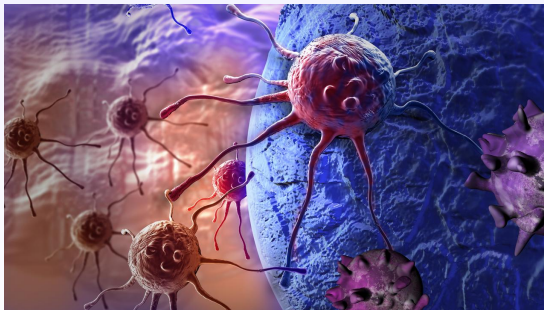
Cérémonie de remise de prix des Olympiades de Mathématiques

Qu'est-ce qu'un écosystème ?



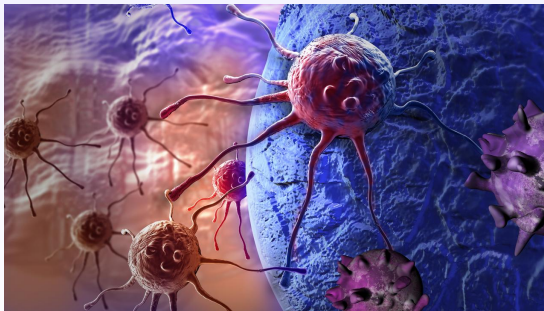
Qu'est-ce que la modélisation mathématique?

Idée : Décrire un système "réel" à l'aide d'outils mathématiques



Qu'est-ce que la modélisation mathématique?

Idée : Décrire un système "réel" à l'aide d'outils mathématiques
à travers une question ou une problématique spécifique.



Difficultés pour la modélisation

- Rien n'est *complètement* descriptible mathématiquement,
- *complexité* du monde vivant,
- *diversité*,
- variabilité individuelle, ...

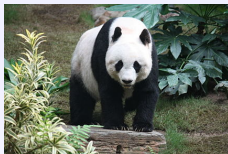


- Associer des quantités calculables : temps d'extinction d'une espèce, vitesse d'invasion...
- Développer des algorithmes de simulation à partir des modèles,
- Construire des outils statistiques à partir de données pour prédire et quantifier,
- Modèles mathématiques novateurs : déterministes et stochastiques,...

Etude de populations de petites tailles

Modélisation de populations de petites tailles

- Population en danger d'extinction



- Population nouvelle sur un espace



Exemple: le modèle de Galton-Watson

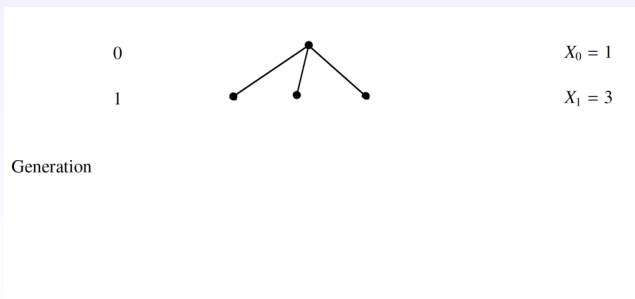
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



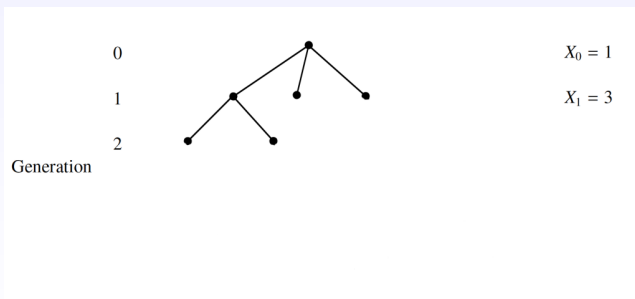
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



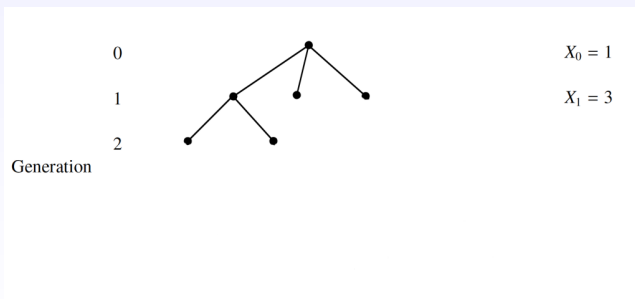
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



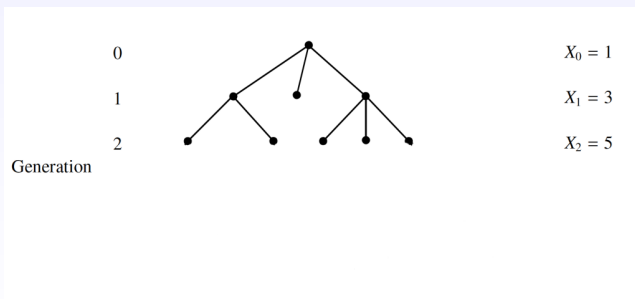
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



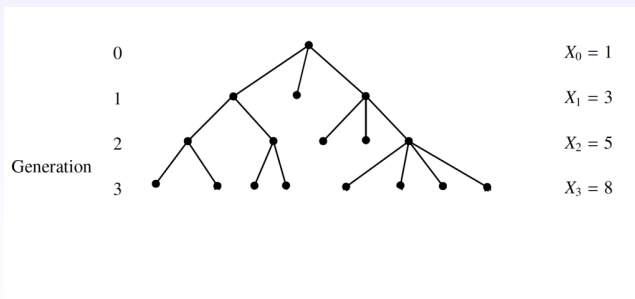
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



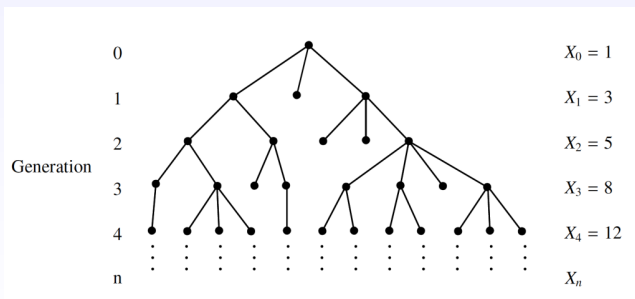
Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



Le modèle de Galton-Watson

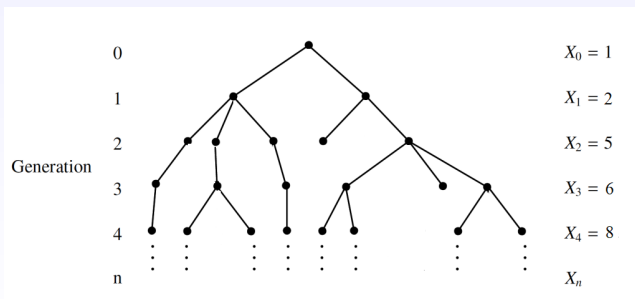
- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



A chaque génération n , X_n désigne la taille totale de la population.

Le modèle de Galton-Watson

- A chaque génération, les individus meurent et laissent un nombre **aléatoire** d'enfants,
- Nombres d'enfants tirés **indépendamment** et avec la **même loi**,
- Moyenne du nombre d'enfants: m .



A chaque génération n , X_n désigne la taille totale de la population.

Comportement en temps long de la population?

Extinction?



Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 1ère génération:

$$p_1 =$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 1ère génération:

$$p_1 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{Si } \emptyset \text{ n'a pas d'enfant}}$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 2ème génération:

$$p_2 =$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 2ème génération:

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}}$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 2ème génération:

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 enfant}} * \frac{1}{8}$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 2ème génération:

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 enfant}} * \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{2 enfants}} * \frac{1}{8} * \frac{1}{8}$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 2ème génération:

$$p_2 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 enfant}} * p_1 + \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{2 enfants}} * p_1 * p_1$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 3ème génération:

$$p_3 =$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Avant la 3ème génération:

$$p_3 = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1 enfant}} * p_2 + \underbrace{\frac{3}{8}}_{\text{2 enfants}} * p_2 * p_2$$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

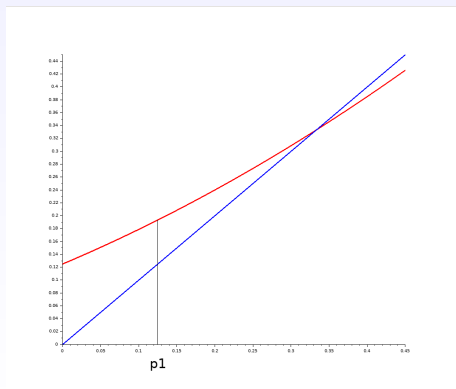
Avant la nème génération:

$$p_n = \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{pas d'enfant}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{1 \text{ enfant}} * p_{n-1} + \underbrace{\frac{3}{8}}_{2 \text{ enfants}} * p_{n-1} * p_{n-1}$$

Extinction ?

Exemple:

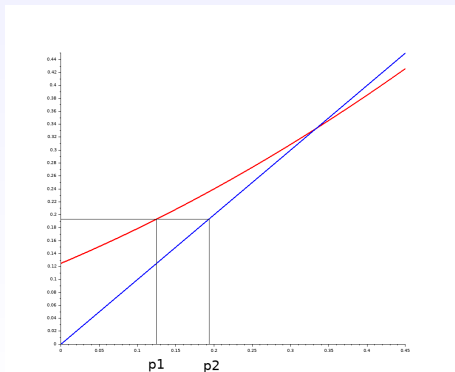
- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$



Extinction ?

Exemple:

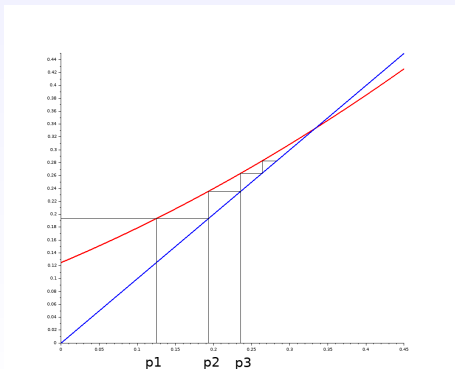
- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$



Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$



Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Probabilité d'extinction :

p solution de

$$p = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} * p + \frac{3}{8} * p * p$$

i.e. ici $p = \frac{1}{3}$

Extinction ?

Exemple:

- Probabilité d'avoir 0 enfant: $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'avoir 1 enfant: $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'avoir 2 enfants: $\frac{3}{8}$

Le même raisonnement peut-être fait avec d'autres lois de probabilité.

En temps long: extinction?

- Si la moyenne est plus petite que 1 ($m < 1$) : la population s'éteint avec probabilité 1

$$p = 1$$

- Si la moyenne est plus grande que 1 ($m > 1$):

$$p < 1$$

et lorsque la population ne s'éteint pas: la population croît vers l'infini.

- Si $m = 1$ (et $p_1 \neq 1$): la population s'éteint avec probabilité 1, mais la moyenne du temps d'extinction peut être infinie.

Exemple d'étude: Les ours des Pyrénées centrales

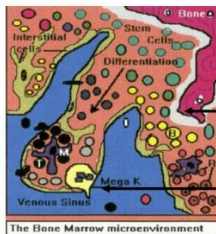
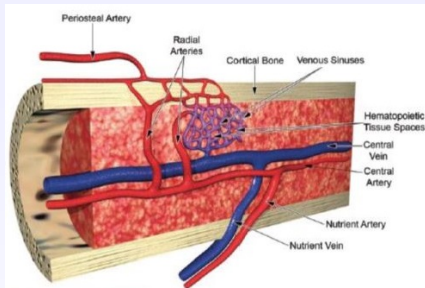
↔ Cloez, Daufresne, Kerioui, Fontez, 2019



Figure: Rapport annuel 2016, suivi de l'ours brun, Camarra et al.

Etude de populations de grandes tailles

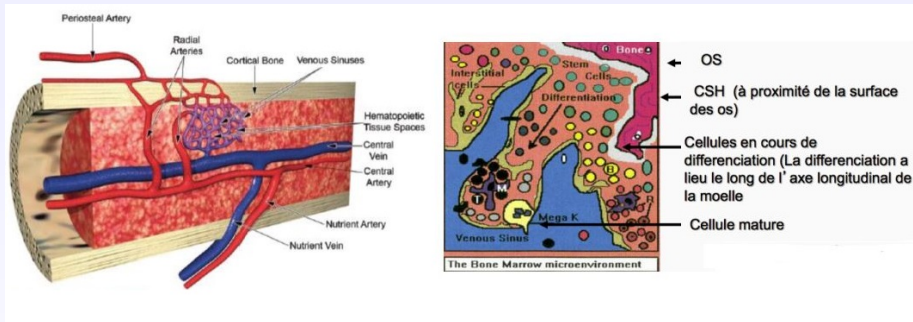
Exemple: Hématopoïèse



- ← OS
- ← CSH (à proximité de la surface des os)
- Cellules en cours de différenciation (La différenciation a lieu le long de l'axe longitudinal de la moelle)
- Cellule mature

Expérience de contrôle décrite dans [Crauste et al, 2008, JTB]:
observation d'une **variation d'un peu plus de 10% du nombre de globules rouges** chez la souris au cours du temps.

Exemple: Hématopoïèse



Expérience de contrôle décrite dans [Crauste et al, 2008, JTB]:
observation d'une **variation d'un peu plus de 10% du nombre de globules rouges** chez la souris au cours du temps.

Cette variabilité peut-elle être due à l'aléatoire ?

Modèle de division cellulaire

Même processus avec un pas de temps très petit: h .

A chaque pas de temps, chaque individu/cellule

- se divise avec probabilité $b \cdot h$,
- sinon meurt avec probabilité $d \cdot h$,
- (sinon il ne lui arrive rien!)

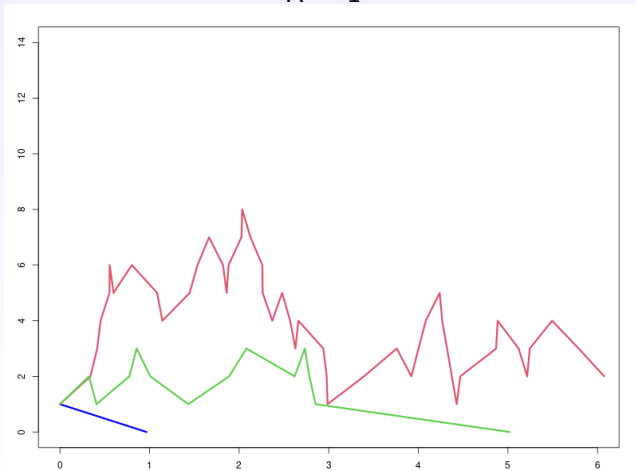
$\hookrightarrow$ Nombre de cellules au temps t : X_t

Lemma (3 comportements)

- si $b > d$: *croissance*
- si $b = d$: *constant*
- si $b < d$: *décroissance*

Simulation du processus de naissances et morts

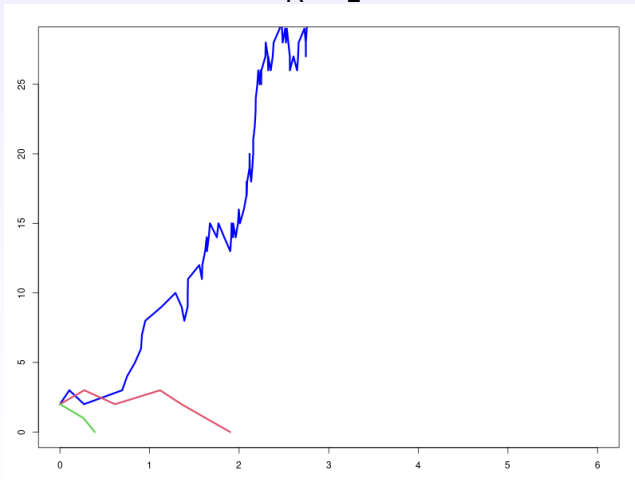
$$K = 1$$



Simulation du processus de naissances et morts

↪ Grande population ?

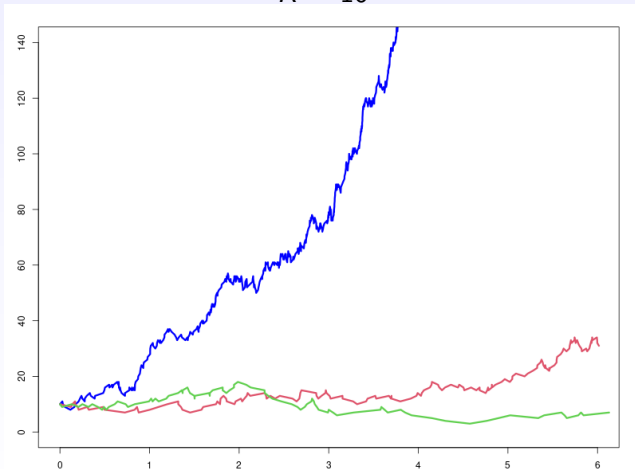
$K = 2$



Simulation du processus de naissances et morts

↪ Grande population ?

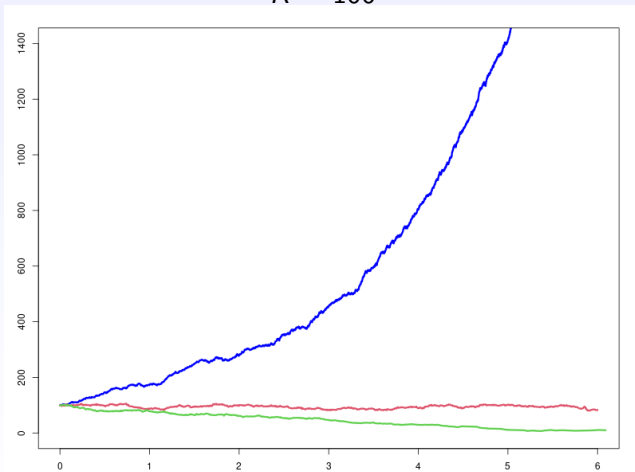
$K = 10$



Simulation du processus de naissances et morts

↪ Grande population ?

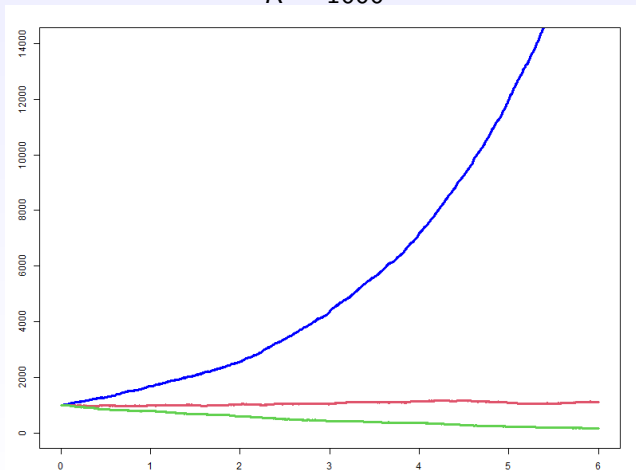
$K = 100$



Simulation du processus de naissances et morts

↪ Grande population ?

$K = 1000$



Comportement moyen : "loi des grands nombres"

Initialement: K cellules.

Théorème (Ethier-Kurtz, 1986)

$$\underbrace{X_t}_{\text{processus aléatoire}} \xrightarrow{K \rightarrow +\infty} \underbrace{K \ x(t)}_{\text{limite déterministe}}$$

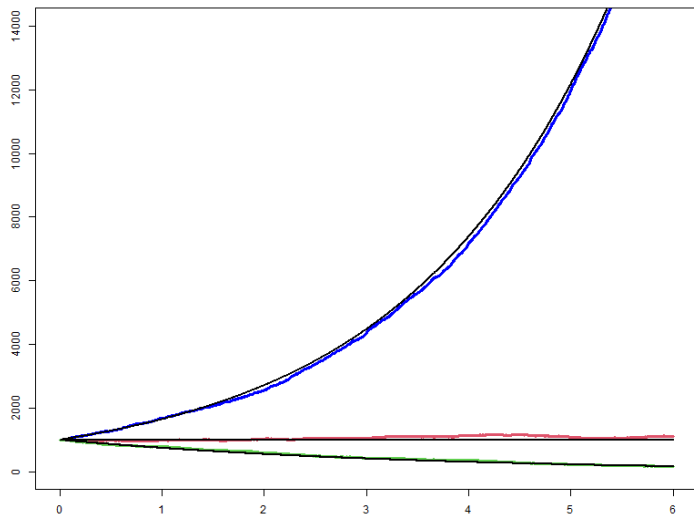
avec $x(t)$ solution de

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) * (b - d) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Le modèle déterministe $\simeq$ comportement moyen lorsqu'il y a beaucoup de cellules.

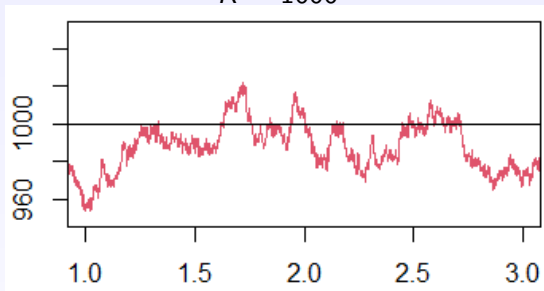
Comportement moyen

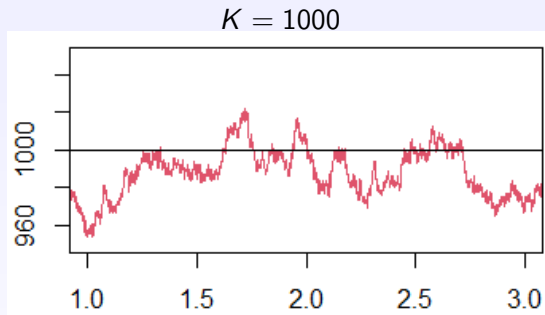
$K = 1000$



Zoom

$$K = 1000$$



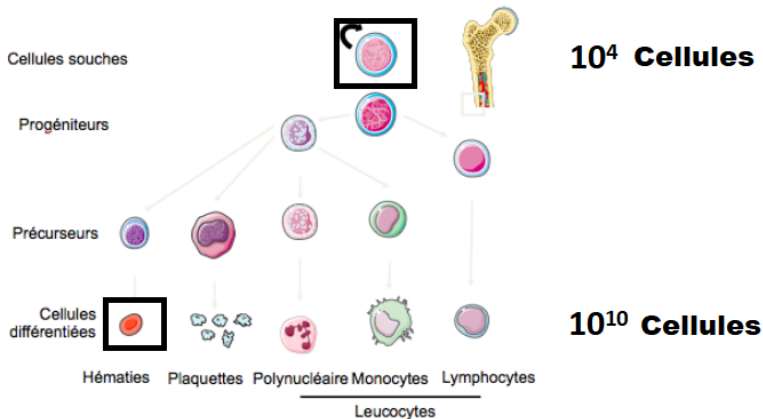


Théorème (Cas $b=d$)

$$\underbrace{X_t}_{\text{processus aléatoire}} \underset{K \rightarrow +\infty}{\approx} K \underbrace{x(t)}_{\text{limite déterministe}} + \underbrace{\sqrt{2b \cdot K} B(t)}_{\text{fluctuations browniennes}}$$

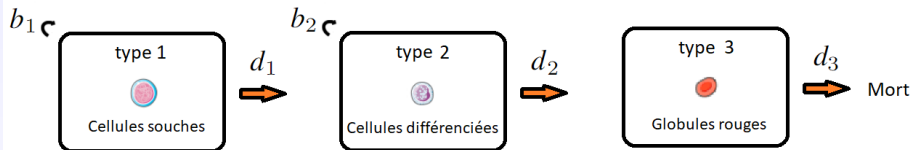
Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.

L'hématopoïèse : une hiérarchie cellulaire



Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.

↔ Bonnet et al 2020.



avec

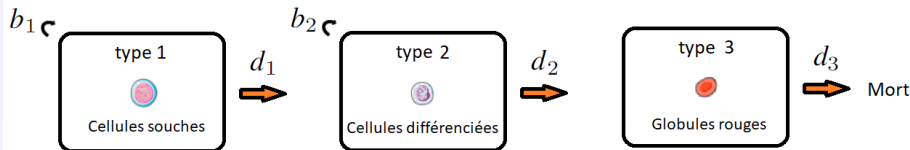
$$b_1 - d_1 = 0$$

$$b_2 - d_2 < 0$$

$$d_3 > 0$$

Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.

↔ Bonnet et al 2020.



avec

$$b_1 - d_1 = 0$$

$$b_2 - d_2 < 0$$

$$d_3 > 0$$

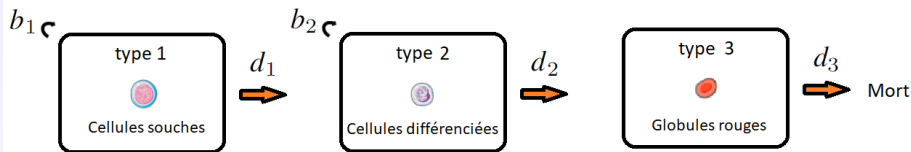
Equilibre:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 0 \\ x_2'(t) = d_1 x_1 + (b_2 - d_2) x_2 \\ x_3'(t) = d_2 x_2 - d_3 x_3 \end{cases}$$

$$\left(x_1(0), \frac{d_1}{d_2 - b_2} x_1(0), \frac{d_2}{d_3} \frac{d_1}{d_2 - b_2} x_1(0) \right)$$

Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.

↪ Bonnet et al 2020.



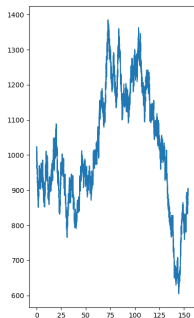
avec

$$b_1 - d_1 = 0$$

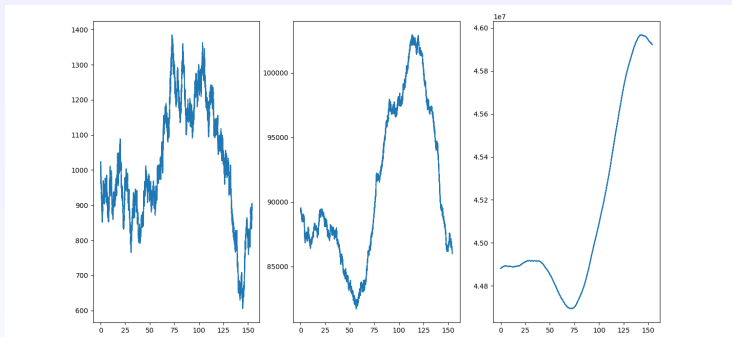
$$b_2 - d_2 = -\frac{1}{K^{0.25}}$$

$$d_3 = \frac{1}{K^{0.4}}$$

Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.



Hématopoïèse: Modèle plus réaliste.



$$X_3(t) \simeq K^{1.65} + \underbrace{V(t)}_{\substack{\text{processus} \\ \text{stochastique}}} K^{1.35}$$

↪ 6% de fluctuations !

Et les interactions ?

Limite des modèles de Galton-Watson ou de naissance/mort:

aucune interaction

→ La taille de la population peut **croître vers l'infini!**

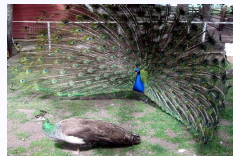
Compétition



Coopération



Reproduction...



Conclusion

Intérêt de l'interdisciplinarité mathématiques-biologie:

- Développement d'outils novateurs en mathématiques,
- Divers approches mathématiques: probabilités, équations aux dérivées partielles, statistiques...
- Quantification de questions biologiques,
- Simulations numériques des dynamiques...

Où trouver d'autres exemples et des infos ?



IMAGES DES MATHÉMATIQUES
La recherche mathématique en mots et en images



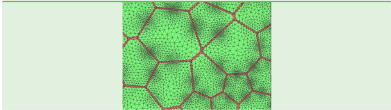
ACCUEIL
EN CE MOMENT
DIFFÉRENTES MATHÉMATIQUES
DOSSIERS
QUI SOMMES-NOUS ?

Échos de la recherche
Retour à la rubrique

[Rediffusion d'un article publié en 2009]
TRIANGULATIONS : DE LA TERRE AU NŒUD DE TRÈFLE.

Piste rouge

Le 15 mars 2024 - Écrit par Marché, Julien



[Rediffusion d'un article publié le 25 février 2009]

Aux alentours de l'année 1730 un vif débat agite la communauté scientifique : la Terre est-elle aplatie ou allongée aux pôles ? Des observations astronomiques de John Flamsteed en Angleterre et Jean-Dominique Cassini (dit Cassini I) en France en 1666 avaient montré que Jupiter et Saturne étaient fortement aplatis tandis que l'astronome et navigateur Jean Richer avait remarqué que son pendule battait moins vite à Cayenne qu'à Paris [1]. Sans compter les explications théoriques de Newton et Huygens, cela ne pouvait s'expliquer que par la forme aplatie de la terre : d'où est-donc née la polémique dite « querelle des têtes plates et des têtes allongées » ?



D'un livre de Jacques Cassini (dit Cassini II) paru en 1723 : le « traité de la grandeur et de la figure de la terre ». L'auteur y résumait les travaux de la vaste entreprise de la triangulation de la France commencée en 1669 (voir ci-contre [2]). En comparant ses mesures à celles qu'on trouverait si on

L'AUTEUR
MARCHÉ, JULIEN
Professeur de mathématiques à l'université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu.

VOIR LES COMMENTAIRES
PARTAGER CET ARTICLE

TAGS

Géométrie et Topologie

DOSSIERS

Cet article fait partie du dossier
«Mathématiques de la planète Terre»
+ voir le dossier

L'IMAGE DU JOUR


MENU

 MATHÉMATIQUES

Matheuses. Les filles, avenir des mathématiques

 FR 



Accueil

Matheuses. Les filles, avenir des mathématiques

Sortie du livre le 25 janvier 2024 chez [CNRS Éditions](#)

A - / A+

Imprimer 



Présentation du livre
Matheuses : Les filles, avenir des maths est une rencontre

interstices.info

Les Newsletters Interstices

DOMAINES RESSOURCES À PROPOS

- Algorithmes
- Architecture & Systèmes
- Culture & Société
- Données
- Environnement & Planète
- Histoire du numérique
- Intelligence artificielle
- Interaction Humain/Machine
- Langages, programmation & logiciel
- Modélisation & Simulation
- Médecine & Sciences du vivant
- Robotique
- Réseaux & Communication
- Sécurité & Vie privée
- Traitement d'images & Son

Explorez les sciences du numérique

Algorithmes, logiciels, modèles, données... entrez dans les interstices

04/09/2023

Quelle éthique pour les agents conversationnels ?

Ils sont à la fois sources d'inquiétudes et impressionnants par leurs "capacités",

**SCIENTES
INFORMATIQUES**

Les décodeuses du numérique

Actualités

Annuaire

Intranet

cnrs.fr

FAIRE UN DON

FR





À propos

Recherche

Innovation

International

Talents



Accueil

Les décodeuses du numérique

Au travers de 12 portraits de chercheuses, enseignantes-chercheuses et ingénieures dans les sciences du numérique, croquées par le crayon de Léa Castor, CNRS Sciences informatiques a souhaité mettre en avant la diversité des recherches en sciences du numérique et contribuer à briser les stéréotypes qui dissuadent les femmes de s'engager dans cette voie.

A - / A +

Cookies & Services

Contact(s)

Communication CNRS Sciences