LE POMPISTE

Dans les programmes

Mettre un problème en équation. Travail sur les fonctions polynômes de degré 2.

Un pompiste vend le litre d'essence au prix de 1,20 €. Le prix d'achat est pour lui de 0,85 € le litre. Il sait qu'il peut compter sur une vente journalière de 1 000 litres et qu'à chaque baisse de 1 centime qu'il consent pour le prix du litre, il vendra 100 litres de plus par jour.
On nombre x le nombre de baisses de 1 centime. On note $f(x)$ le bénéfice (en euros) correspondant.

1. A l'aide d'un programme, déterminer le prix de vente du carburant correspondant à un bénéfice maximal.
2. Si cela n'a pas été fait dans l'algorithme précédent, quel algorithme peut-on écrire pour vérifier l'unicité de la réponse au problème précédent ?
3. En utilisant les résultats de la question précédente, que pouvez vous dire du maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1000 + 100\,x)(1{,}20 - x/100 - 0.85) \quad ?$$

Éléments de réponses – XCAS

1. **Recherche d'une solution.**
   Pour x baisses, le nombre de litres vendus est de $1000+100x$ avec un bénéfice de $1,20-\frac{x}{100}-0,85$ € par litre.
   Le nombre maximal de baisses est de 35 (écart entre 1,20 et 0,85).

   Xcas
   ```
   nb_baisses:=0:;
   benef_max:=1000*(1.20-0.85):;
   pour k de 1 jusque 35 faire
   benef:=(1000+100*k)*(1.20-k/100-0.85);
   si benef>benef_max alors benef_max:=benef; nb_baisses:=k;fsi;
   fpour:;
   print(nb_baisses):;
   ```

   Le programme annonce un nombre optimal de baisses de 12, soit un prix de vente de 1,08 €.

2. **Problème de l'unicité**
   On peut faire une recherche des éventuelles autres valeurs du nombre de baisses correspondant à ce bénéfice maximal comme suit :

   Xcas
   ```
   nb_baisses:=0:;
   benef_max:=1000*(1.20-0.85):;
   pour k de 1 jusque 35 faire
   benef:=(1000+100*k)*(1.20-k/100-0.85);
   si benef>benef_max alors benef_max:=benef; fsi;
   fpour:;
   pour k de 0 jusque 35 faire
   benef:=(1000+100*k)*(1.20-k/100-0.85);
   si benef==benef_max alors print(k);fsi;
   fpour:;
   ```

   Avec 12 ou 13 baisses, soit avec des prix du litre de 1,08 € ou 1,07 €, le bénéfixe est maximal (bénéfice de 506 € dans les deux cas).

3. **Traitement graphique**.
   On peut ajouter un affichage des points de coordonnées (nombre de baisses ; bénéfice correspondant) :

Xcas

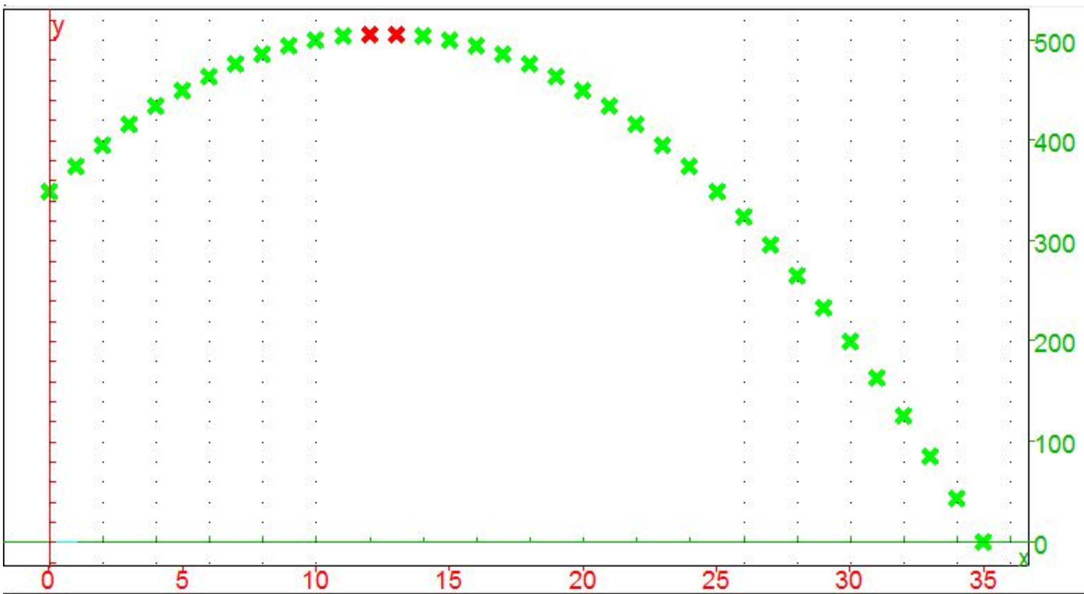
```
nb_baisses:=0:;
benef_max:=1000*(1.20-0.85):;

pour k de 1 jusque 35 faire
        benef:=(1000+100*k)*(1.20-k/100-0.85);
        si benef>benef_max alors benef_max:=benef; fsi;
fpour:;

liste_max:=[]:;
liste_autre:=[]:;
pour k de 0 jusque 35 faire
        benef:=(1000+100*k)*(1.20-k/100-0.85);
        si benef==benef_max
        alors afficher(k);liste_max:=append(liste_max,point(k,benef));
        sinon liste_autre:=append(liste_autre,point(k,benef));
        fsi;
fpour:;

affichage(liste_max,point_width_4+red);
affichage(liste_autre,point_width_4+green);
```

Cliquer sur la case "auto" à droite de l'écran graphique qui s'affiche après exécution pour visualiser les points.



4. **Maximum de la fonction.**
Dans une classe où l'on aura déjà travaillé sur la symétrie des courbes représentant les fonctions du second degré, on conjecturera que l'abscisse du maximum de la fonction est $\frac{12+13}{2} = 12{,}5$. Ce que l'on pourra ensuite vérifier par le calcul $f(x) - f(12{,}5) = -(x-12{,}5)^2$.