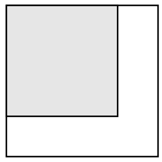
Paver avec des rectangles d'aspect unique — Correction

Partie I

Question 1. Un 1-pavage est un pavage d'un carré C composé lui-même de carrés. L'un de ces carrés, que l'on appellera A, est positionné dans le coin en haut à gauche de C car ce coin doit être couvert par le pavage. Supposons que le pavage est de taille supérieure ou égale à 2 : le carré A ne peut pas recouvrir à lui seul le carré C et l'on a donc la figure à droite où A est en gris. L'espace restant, en blanc, ne peut être recouvert avec un seul carré. Ainsi l'effectif du 1-pavage est au moins égale à 3.

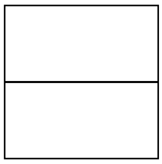


Question 2. Pour tout entier naturel non nul n on peut paver un carré de côté n par $n \times n$ carrés de côté 1 ce qui constitue un 1-pavage d'effectif n^2.

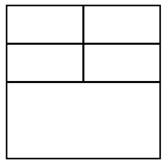
Partie II

Question 3. a) Un pavage d'effectif 1 d'un carré est constitué d'une seule pièce qui doit donc recouvrir tout le carré. L'aspect de cette seule pièce est ainsi nécessairement égal à 1. Il n'existe donc pas de 2-pavage d'effectif 1.

b) 2-pavage d'effectif 2 :

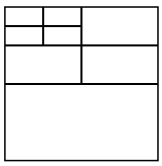


2-pavage d'effectif 5 :

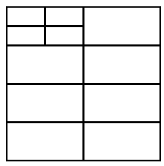


c) En coupant un rectangle R en deux exactement au milieu de sa longueur et de même dans le sens de la largeur, on remplace ce rectangle par quatre rectangles semblables au premier. Leur aspect est donc égal à celui de R. Si n est l'effectif d'un 2-pavage donné, en effectuant cette opération sur n'importe lequel des rectangles du pavage on obtient un nouveau pavage dont tous les rectangles ont encore un aspect égal à 2, et d'effectif $n - 1 + 4 = n + 3$. C'est ce que l'on a fait dans la question précédente.

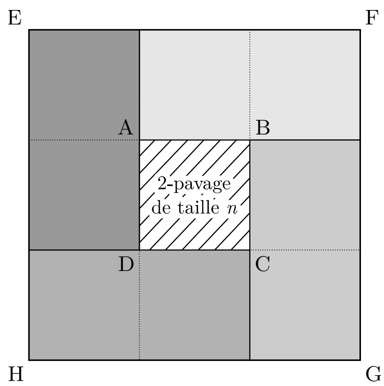
d) 2-pavage d'effectif 8 :



2-pavage d'effectif 11 :



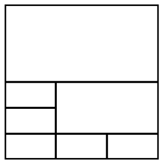
Question 4. a) Voir la figure ci-contre. Chacun des quatre rectangles grisés ajoutés est bien d'aspect 2.



b) En appliquant la méthode de la question précédente au 2-pavage de taille 2 précédemment trouvé on obtient un 2-pavage d'effectif 6. On obtient un 2-pavage d'effectif 9 en appliquant la même technique au 2-pavage d'effectif 5 de la question 3.b) ou en appliquant la question 3.c) au 2-pavage d'effectif 6 tout juste obtenu. Quant au 2-pavage d'effectif 10 on peut l'obtenir en utilisant la question 4.a) à ce même 2-pavage d'effectif 6.

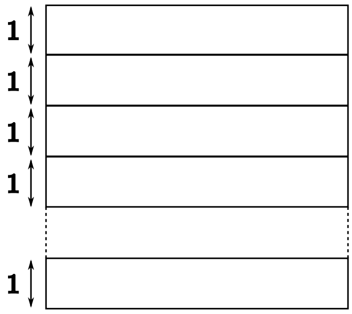
Question 5. On sait déjà qu'il existe des 2-pavages d'effectifs 8, 9 et 10 . En appliquant la question 3.c), on obtient alors des 2-pavages d'effectifs $8 + 3 = 11$, $9 + 3 = 12$ et $10 + 3 = 13$. En répétant l'opération on obtient successivement tous les effectifs trois par trois. Plus précisément on peut démontrer par récurrence la propriété P_n : « il existe un 2-pavage d'effectif k pour tout $8 \leqslant k \leqslant n$ » car P_{10} est vraie tandis que si P_n est vraie pour $n \geqslant 10$ alors il existe un 2-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant 8$ donc par la question 3.c) on construit un 2-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$.

Question 6. Voir la figure à droite.



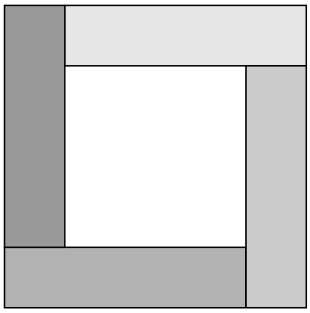
Partie III

Question 7. a) Découper un carré de côté A en A bandes de largeur A et de hauteur 1 comme sur le dessin ci-contre constitue bien un A-pavage d'effectif A.

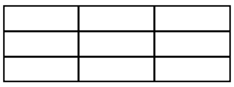


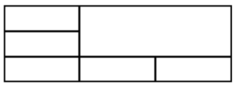
b) Comme expliqué dans la question 3.c) découper un rectangle en quatre rectangles semblables conserve l'aspect et appliquer cette opération à un rectangle quelconque du A-pavage précédent donne un A-pavage d'effectif $A + 3$.

c) Dans un carré de côté $A + 1$, disposer quatre rectangles de dimensions $A \times 1$ comme indiqué ci-contre laisse au centre un espace vide carré de côté $A - 1$. Il suffit de remplir ce vide avec le A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) en adaptant sa taille avec une homothétie de rapport $1 - 1/A$.



d) En découpant un rectangle d'aspect A en trois parts égales dans chaque direction, on obtient la figure ci-dessous à gauche constituée de 9 rectangles de même aspect car ils sont semblables au rectangle d'origine. En fusionnant quatre de ces petits rectangles on obtient un rectangle toujours de même aspect comme dans la figure ci-dessous à droite qui contient 6 rectangles.





On applique cette technique à un rectangle quelconque du A-pavage d'effectif A trouvé en 7.a) pour obtenir un A-pavage d'effectif $A - 1 + 6 = A + 5$.

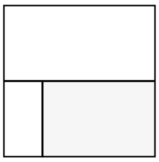
Question 2. On démontre par récurrence l'assertion P_n : « il existe un A-pavage d'effectif k pour tout $A + 3 \leqslant k \leqslant n$ » pour tout $n \geqslant A + 5$. P_{A+5} est vraie d'après la question 1. Si P_n est vraie pour $n \geqslant A + 5$ alors il existe un A-pavage d'effectif $n - 2 \geqslant A + 3$ auquel on applique la technique de la question 7.b) pour construire un A-pavage d'effectif $n - 2 + 3 = n + 1$ ce qui démontre P_{n+1}.

Partie IV

Question 1. S'il existe un A-pavage d'effectif n, par homothétie on peut supposer sans perte de généralité qu'il pave un carré de côté A. Chaque rectangle de ce pavage est de longueur au plus A pour tenir dans le carré, donc de largeur au plus 1 puisqu'on connait son aspect : ainsi son aire est au plus A. L'aire totale recouverte par le pavage est donc au maximum nA. Puisque le pavage recouvre le carré, cette aire est A^2. Ainsi $A^2 \leqslant nA$ donc $A \leqslant n$ (car $A > 0$). Il n'existe aucun A-pavage d'effectif $n < A$.

Question 2. On suppose ici sans perte de généralité que le carré pavé est de côté 2. S'il existe un 2-pavage d'effectif 3 alors chacun des quatre coins du carré pavé est en contact avec un des 3 rectangles qui le pavent. Il y a donc un rectangle en contact avec deux coins. Ces deux coins sont consécutifs sinon le rectangle couvre tout le carré ce qui n'est pas possible : ce rectangle est donc de longueur 2 et de largeur 1. L'espace restant à paver (en

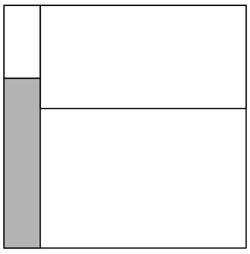
gris) est lui-même rectangle, et au moins deux de ses coins est en contact avec le même rectangle du pavage. Ces deux coins ne peuvent pas être opposés, ni consécutifs suivant la longueur car alors le rectangle du pavage serait le rectangle gris lui même, ne laissant pas de place au dernier rectangle. C'est donc qu'un des rectangles du pavage est en contact avec la totalité d'une des largeurs du rectangle gris, et forcément le long de sa propre longueur pour laisser de la place au dernier rectangle. Ses dimensions sont ainsi $1\times\frac{1}{2}$ ce qui laisse un espace à paver



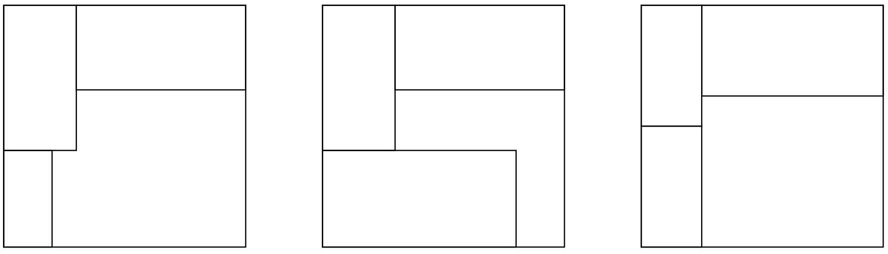
gris de dimensions $1\times\frac{3}{2}$. Cet espace doit être couvert par un unique rectangle, mais n'est pas d'aspect 2. Il n'existe ainsi aucun 2-pavage d'effectif 3.

Remarque : il n'existe pas non plus de 2-pavage d'effectif 4.

En effet, s'il existe un 2-pavage d'effectif 4 et qu'un des rectangles du pavage est en contact avec deux coins du carré à paver alors le raisonnement précédent s'applique à ceci près que l'espace de dimensions $1\times\frac{3}{2}$ doit être pavé avec deux rectangles d'aspect deux ce qui n'est pas clairement pas possible. C'est donc que chaque rectangle du pavage est en contact avec exactement un des coins du carré à paver. Quitte à faire une symétrie axiale suivant une diagonale du carré, supposons que le rectangle en haut à gauche (noté HG) est disposé verticalement (sa longueur est verticale et sa largeur est horizontale). Pour laisser de la place au rectangle BG en bas à gauche sa longueur doit être strictement inférieure à 2 et donc sa largeur strictement inférieure à 1. Le rectangle HD en haut à droite ne peut ainsi être vertical sinon il aurait lui aussi une largeur strictement inférieure à 1 et laisserait un vide le long du côté supérieur du carré.



Il est donc horizontal et sa largeur n'est pas supérieure à la longueur du rectangle HG sinon il y aurait un espace libre sous HG et à gauche de HD qui serait impossible à combler avec le rectangle BG en conservant son aspect 2 (voir ci-contre). On est donc dans une des trois situations ci-dessous :



Dans les deux situations de gauche, l'espace restant à paver par le rectangle BD en bas à droite n'est pas rectangulaire ce qui est impossible. Dans la situation la plus à droite on a représenté BG verticalement de même largeur que HG mais il peut aussi être horizontal de longueur égale à la largeur de HG. L'important est que l'espace restant à paver avec BD, même s'il est bien rectangle, n'est pas d'aspect 2. En effet sa dimension horizontale h est égale à $2-l$ où $l<1$ est la largeur de HG donc $h>1$ ne peut être la largeur de BD qui est ainsi disposé horizontalement. Puisque h est aussi la longueur de HD d'aspect 2 la dimension verticale v de l'espace restant est égale à $v=2-\frac{h}{2}>1>\frac{h}{2}$ puisque $\frac{h}{2}<1$. $v\neq\frac{h}{2}$ et BD ne peut avoir le bon aspect.

En définitive il n'y a pas de 2-pavage d'effectif 4.