La démarche et les valeurs relevées avec la hp prime seront inscrites sur votre copie.

1 Conjectures avec la hp prime

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-0,1t}\cos(t)$.

1. Tracer la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0;30]$.
2. Tracer les courbes des fonctions $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{-0,1t}$ et $h : t \longmapsto -\mathrm{e}^{-0,1t}$ sur le graphique.
3. Conjecturer, par observation du graphique, la limite de la fonction f quand t tend vers l'infini.
   Rappeler l'instruction hp prime à utiliser pour calculer cette limite et confirmer ainsi votre conjecture graphique.
4. On s'intéresse ici aux points de contact entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
   (a) La différence entre les abscisses de deux points consécutifs de l'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$ semble-t-elle constante ?
   Pour récupérer facilement les abscisses de ces points, dans la vue plot du menu fonctions, on place le curseur un peu avant une intersection et on utilise Menu/Fcn/Intersection.
   (b) A partir d'une observation de la fenêtre graphique, dire si les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent tangentes en ces points d'intersection (deux courbes présentant un point commun sont dites tangentes en ce point si elles admettent la même tangente en ce point).
   On pourra aussi utiliser l'outil pente.
5. En zoomant sur le voisinage d'un point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, vous semble-t-il que l'image de l'abscisse de ce point d'intersection soit un maximum local de f ?
   Au lieu de zoomer, on peut également utiliser le menu « extremum » dans la vue plot de l'application fonctions.
6. Émettre une conjecture sur le rapport des valeurs de deux maximums consécutifs (relever les valeurs des maximums avec l'outil extremum cité précédemment).

2 Démonstrations

1. Proposer une démonstration de la conjecture émise pour $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
2. On s'intéresse ici aux points de contact entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
   (a) Proposer une démonstration de la conjecture émise sur la différence entre les abscisses de deux points consécutifs de l'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
   (b) Proposer une démonstration de la conjecture émise sur les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'intersection.
3. Par l'observation de la courbe de la fonction f, il est clair que cette fonction n'est pas périodique. On nommera pseudo-période de f l'écart entre deux points consécutifs de l'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
   Quelle est la valeur de cette pseudo-période ?

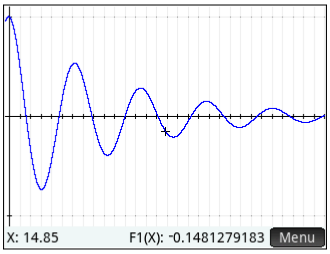
4. Rappeler (ou chercher !) ce que signifie la phrase « Pour la fonction p définie sur un intervalle J, le nombre $a \in \mathrm{J}$ est un maximum local ».
5. Soit p une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J et $a \in \mathrm{J}$. On rappelle que la condition « $p'(a) = 0$ » est une condition nécessaire pour que a soit un extremum local de p. Cette condition est-elle suffisante ? Expliquer votre réponse.
6. On admet ici que f admet un extremum local en tout réel a tel que $f'(a) = 0$. Déterminer l'ensemble des réels concernés. On utilisera la calculatrice pour des valeurs approchées. On pourra introduire (justifier son existence) le nombre ϕ tel que $\left(\cos(\phi), \sin(\phi)\right) = \left(\dfrac{0{,}1}{\sqrt{1{,}01}}, \dfrac{1}{\sqrt{1{,}01}}\right)$.
7. Parmi les réels en lesquels f admet un extremum, dire, par observation graphique, lesquels correspondent à un maximum local et lesquels correspondent à un minimum local.
8. Quel est l'écart entre deux nombres en lesquels f admet un maximum local ? Quel est l'écart entre deux nombres en lesquels f admet un minimum local ?
9. Proposer une démonstration de la conjecture émise sur le rapport des valeurs de deux maximums consécutifs.

Éléments de correction

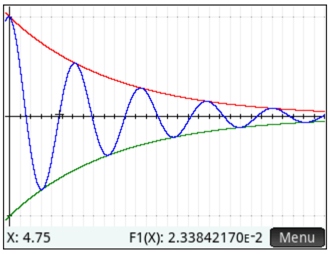
1 Conjectures

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-0,1t}\cos(t)$.

1. Courbe de la fonction f :

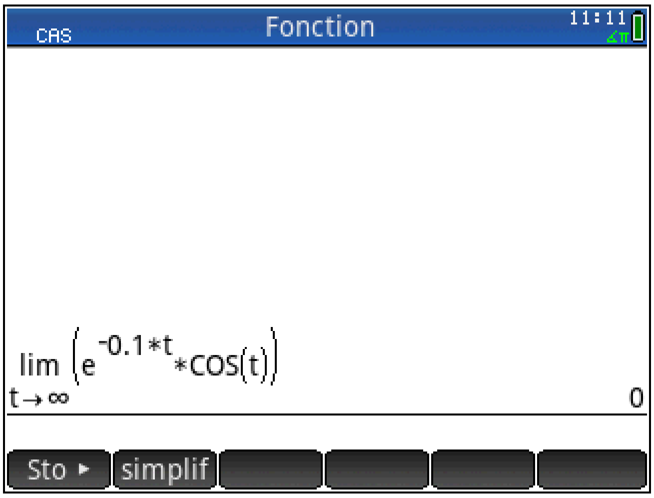


2. Courbe des fonctions f, g, h :

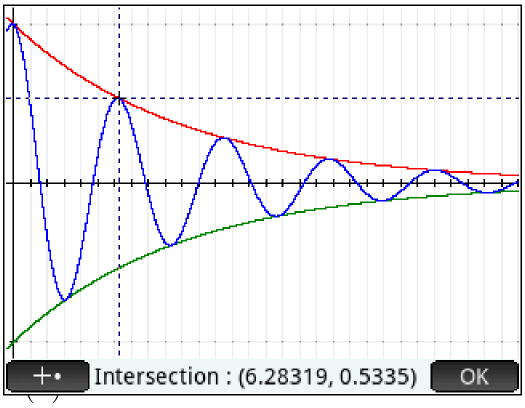


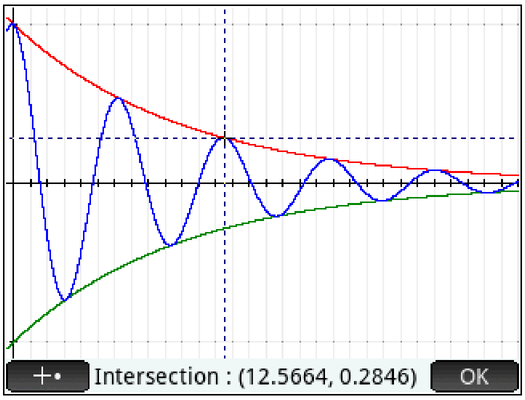
3. Il semble que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

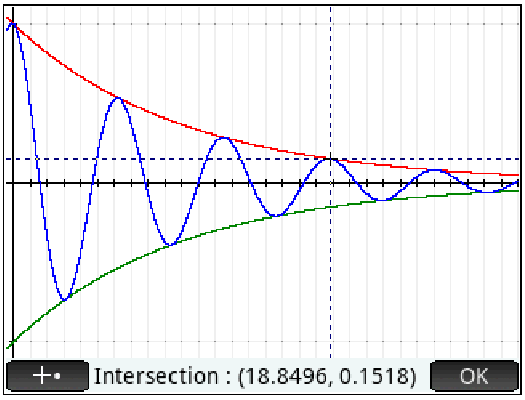
   Instruction sur hp prime (dans le CAS) :

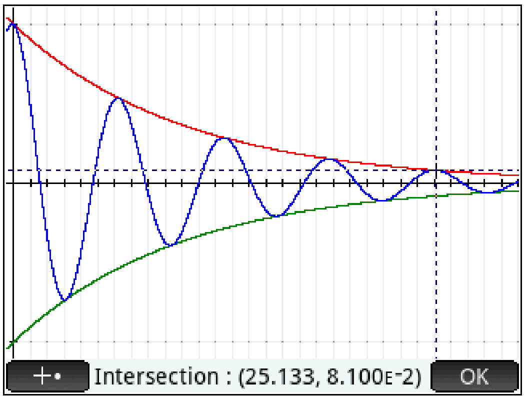


4. On s'intéresse ici aux points de contact entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
   Ci-dessous, on a utilisé plusieurs fois de suite l'outil intersection (menu fonctions, dans la vue plot, Menu/Fcn/Intersection). On utilise le curseur entre deux utilisations de ce menu de façon à placer un point un peu avant une intersection.
   On relève ainsi les abscisses de plusieurs points d'intersection :







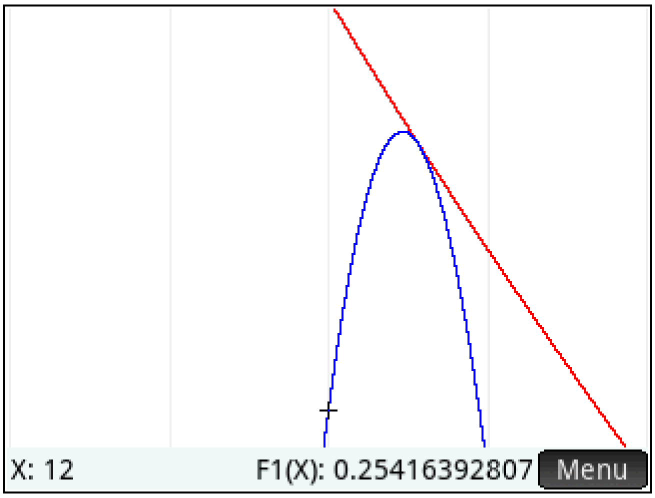


Cette différence semble constante, égale à 2π.

(b) Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ semblent tangentes en leurs points d'intersection.
Sur la calculatrice, on peut chercher à utiliser l'outil « pente » pour une courbe puis l'autre

(rappel : le point change de courbe avec les flèches haut et bas du pad et le point se déplace sur une courbe avec les flèches droite et gauche).

5. Il semble que l'image de l'abscisse d'un point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ne soit pas un maximum local de f. Le maximum local semble placé un peu avant :



On peut également utiliser l'outil extremum (dans la vue plot de l'application fonctions) et constater que la valeur d'abscisse retournée est toujours un peu inférieure à celle retournée pour l'intersection.

6. En utilisant l'instruction extremum citée précédemment et en relevant cette fois les ordonnées, il semble que le rapport de deux maximums consécutifs soit constant.

2 Démonstrations

1. Pour tout réel t, on a $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$.
   On a donc pour tout réel t : $-e^{-0,1t} \leqslant f(t) \leqslant e^{-0,1t}$.
   $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{t\to+\infty}(-0,1t) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,1t} = 0.$$
   On en déduit (théorème des gendarmes) : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

2. On s'intéresse ici aux points de contact entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.
   (a) Les abscisses des points de l'intersection des deux courbes de f et g sont les solutions de l'"équation $f(t) = g(t)$, soit $e^{-0,1t}\cos(t) = e^{-0,1t}$, équation équivalente à $\cos(t) = 1$ (puisque $e^{-0,1t} \neq 0$ pour tout t).
   Les abscisses des points d'intersection sont donc les réels $t_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel t : $g'(t) = -0,1e^{-0,1t}$ (on a utilisé la formule $(e^u)' = u'e^u$).
   La fonction $f : t \longmapsto g(t)\cos(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout réel t :
   $f'(t) = g'(t)\cos(t) + g(t)\cos'(t)$, soit $f'(t) = -0,1e^{-0,1t}\cos(t) - e^{-0,1t}\sin(t)$, ou encore :
   $f'(t) = -e^{-0,1t}(0,1\cos(t) + \sin(t))$.
   En un point d'intersection des deux courbes, d'abscisse $t_k = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on a :

$$\begin{aligned} f'(t_k) &= f'(2k\pi) \\ &= -e^{-0,1t_k}(0,1\cos(2k\pi)+\sin(2k\pi)) \\ &= -e^{-0,1t_k}(0,1\times 1+0) \\ &= -0,1e^{-0,1t_k} \\ &= g'(t_k) \end{aligned}$$

Les deux courbes sont donc bien tangentes en leurs points d'intersection.

3. D'après les calculs faits ci-dessus, les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les nombres $t_k = 2k\pi$.
   La différence entre deux abscisses consécutives est donc égale à 2π.
   La pseudo-période est $\mathrm{T} = 2\pi$.
4. On dit que f admet un maximum local en $a \in \mathrm{J}$ s'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$, on a $f(x) \leqslant f(a)$.
5. Soit p une fonction dérivable sur un intervalle ouvert J et $a \in \mathrm{J}$. On rappelle que la condition « $p'(a) = 0$ » est une condition nécessaire pour que a soit un extremum local de p. Cette condition n'est pas suffisante.
   On peut par exemple se rappeler que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3$ vérifie $p'(0) = 0$ (puisque $p'(x) = 3x^2$ pour tout réel x) mais que cette fonction p n'admet pas d'extremum local en 0.
6. On a $f'(t) = -e^{-0,1t}(0,1\cos(t)+\sin(t))$ pour tout réel t.
   Comme la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous avons :
   $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow 0,1\cos(t)+\sin(t) = 0$.
   Par ailleurs, pour tout réel t : $0,1\cos(t)+\sin(t) = \sqrt{0.1^2+1^2}\times\left(\dfrac{0,1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\cos(t)+\dfrac{1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\sin(t)\right)$.
   Comme $\sqrt{\left(\dfrac{0,1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\right)^2} = 1$, le point $\mathrm{M}\left(\dfrac{0,1}{\sqrt{0.1^2+1^2}};\dfrac{1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\right)$ est un point du cercle trigonométrique. Si l'on pose $\phi = (\widehat{\overrightarrow{i};\overrightarrow{\mathrm{OM}}})$ (angle orienté entre le premier vecteur de la base et le vecteur d'extrémités l'origine du repère et le point M), on a : $\big(\cos(\phi);\sin(\phi)\big) = \left(\dfrac{0,1}{\sqrt{0.1^2+1^2}};\dfrac{1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\right)$.
   On peut donc maintenant écrire :
   $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(\phi)\cos(t)+\sin(\phi)\sin(t) = 0$, soit : $f'(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos(t-\phi) = 0$
   ou encore :
   $$f'(t) = 0 \Longleftrightarrow t-\phi = \frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
   La fonction f admet donc des extrema locaux en les réels $e_k = \phi+\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ avec $\phi = \arccos\left(\dfrac{0,1}{\sqrt{0.1^2+1^2}}\right)$ soit $\phi \approx 1,471\,\mathrm{rad}$.

7. Par observation du graphique, les nombres $m_k = \phi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ correspondent aux minima locaux, et les nombres $M_k = \phi + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$ correspondent aux maxima locaux.
8. L'écart entre M_k et M_{k+1} est égal à la pseudo-période (ici 2π). De même l'écart entre m_k et m_{k+1} est égal à la pseudo-période.
9.

$$\begin{aligned}
f(M_{k+1}) &= f\left(\phi + \frac{\pi}{2} + (2(k+1)+1)\pi\right)\\
&= f\left(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+3)\pi\right)\\
&= \exp\left(-0,1(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+3)\pi)\right) \times \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+3)\pi\right)\\
&= \exp\left(-0,1(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi + 2\pi)\right) \times \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi + 2\pi\right)\\
&= \exp\left(-0,1(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)\right) \times \exp\left(-0,1(2\pi)\right) \times \cos\left(\phi + \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right)\\
&= \exp\left(-0,1(2\pi)\right) \times f(M_k)
\end{aligned}$$

Le rapport $\frac{f(M_{k+1})}{f(M_k)}$ est donc constant, égal à $\exp(-0,1T)$ où T est la pseudo-période.