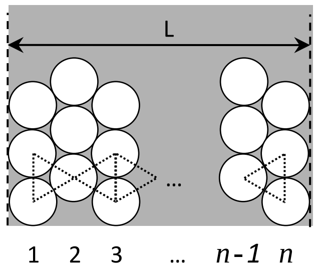
RANGEMENT OPTIMAL DE BOITES DANS DES CASIERS



Partie 1 : *Recherche d'une disposition efficace*

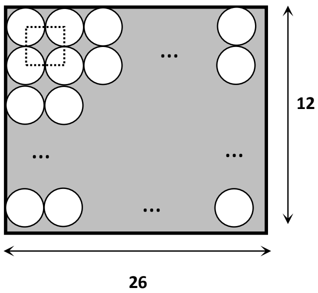
1) a) Soit h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2, montrer que $h = \sqrt{3}$.

b) On considère n colonnes de disques tangents de rayon 1 dans la disposition ci-contre. Montrer que la longueur L occupée par ces n colonnes est égale à $2 + (n-1)\sqrt{3}$

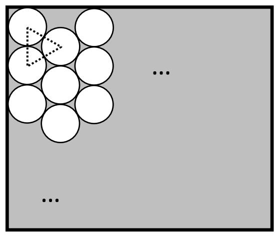
2) Application :
Un commerçant souhaite ranger des boîtes cylindriques de rayon 1 dans un casier rectangulaire de longueur 26 et de largeur 12. En partant du coin supérieur gauche il dispose côte à côte, en lignes ou en colonnes, le plus grand nombre possible de boîtes.
Dans la suite du problème, les boîtes sont représentées par des disques de rayon 1.

Le commerçant hésite entre les trois dispositions suivantes (échelle non respectée) :

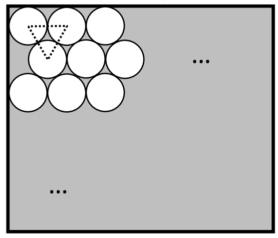
Disposition 1:
"en carrés"



Disposition 2:
"en triangles colonnes"



Disposition 3:
"en triangles lignes"



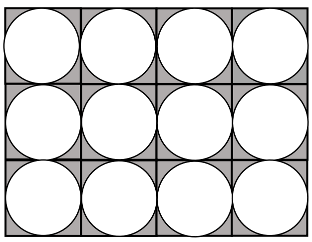
Attention :
Les disques situés en bout de lignes ou de colonnes ne touchent donc pas nécessairement les bords du casier.

Déterminer la disposition permettant de ranger le plus grand nombre de boîtes.

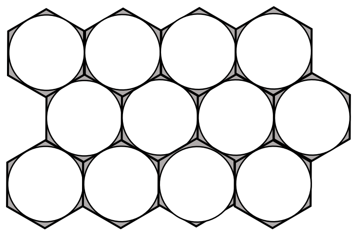
Partie 2 : *Estimation de la proportion de l'aire occupée par les disques :*

On a circonscrit les disques par des polygones (afin de paver l' « intérieur » du casier)

Par des carrés pour la disposition 1 :



Par des hexagones réguliers pour les dispositions 2 et 3 :



On admettra que, pour des casiers de « grandes dimensions », la proportion de l'aire totale occupée par les disques dans les casiers « se rapproche » de : $P = \frac{Aire\ d'un\ disque}{Aire\ d'un\ polygone}$.

1) Déterminer la valeur exacte de P pour la disposition 1 puis pour les dispositions 2 et 3

2) Donner une estimation du nombre n de boîtes que l'on peut ranger dans de « grands » casiers en fonction de l'aire S du casier (on envisagera les cas de la disposition 1 puis des dispositions 2 et 3).

Partie 3 : *Une disposition plus efficace :*

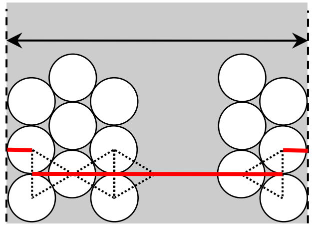
On considère un casier rectangulaire de longueur 444 et de largeur 4.
Trouver une nouvelle disposition permettant de ranger 445 boîtes (on représentera cette nouvelle disposition par un schéma puis on déterminera le nombre de boites par le calcul).

<u>***Proposition de solution :***</u>

<u>Partie 1 :</u>

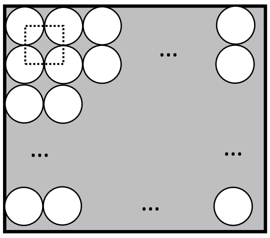
1) a) Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de longueurs 1 ; h et 2 (hypoténuse)

b) La longueur L est celle des 2 rayons aux extrémités et de hauteurs de triangles équilatéraux de longueurs 2, au nombre de (n – 1) (un triangle pour les deux premières colonnes puis on ajoute un triangle à chaque colonne supplémentaire), d'où L = $2 + (n - 1)\sqrt{3}$



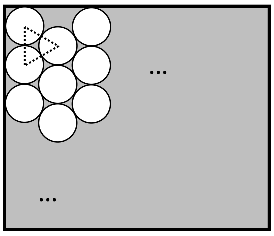
2) Casier 26 x 12 :

<u>Disposition 1</u> :



On a exactement 12/2 = 6 lignes et 26/2 = 13 colonnes donc 78 boîtes.

<u>Disposition 2</u> :



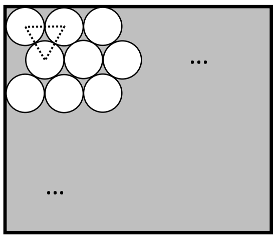
On peut placer exactement 6 boîtes dans la 1ère colonne puis alternativement 5 boîtes et 6 boîtes.

$2 + (n - 1)\sqrt{3} = 26$ donne $n = 24/\sqrt{3} + 1 = 14{,}86$ soit 14 colonnes possibles.

On déduit donc le nombres de boîtes :

7 colonnes à 6 boîtes et 7 colonnes à 5 boîtes donc 42 + 35 = 77 boîtes

<u>Disposition 3</u> :



On peut placer exactement 13 boites dans la 1ère ligne puis alternativement 12 boîtes et 13 boîtes.

$2 + (n - 1)\sqrt{3} = 12$ donne $n = 10/\sqrt{3} + 1 = 6{,}77$ soit 6 lignes possibles.
On déduit donc le nombres de boîtes :

3 lignes à 13 boîtes et 3 lignes à 12 boîtes donc 39 + 36 = 75 boîtes

<u>Conclusion</u> : la disposition 1 est donc la plus efficace.

<u>Partie 2 :</u>

1)

<u>Disposition 1 :</u>

L'aire d'un disque de rayon 1 est π, celle du carré de côté 2 est 4 donc P = $\frac{\pi}{4}$ (environ 0,785 soit 78,5 %)

<u>Disposition 2 et 3 :</u>
Les triangles équilatéraux formant l'hexagone ont pour hauteur 1.

Soit c la longueur de ces triangles équilatéraux, d'après le théorème de Pythagore, $c^2 = 1^2 + (c/2)^2$ d'où $c = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

L'aire d'un hexagone est donc 6 x Aire des triangles équilatéraux donc $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 1 = \frac{6}{\sqrt{3}}$

d'où par division : P = $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (environ 0,907 soit 90,7%).

2) Pour de grandes dimensions de casier, on peut approcher le rapport entre l'aire s occupée par l'ensemble des disques et l'aire S du casier par P, donc $s \approx P \times S$

Or chaque disque ayant une aire égale à π, le nombre *n* de disques sera donc $n = s/\pi \approx P \times S/\pi$

Avec la disposition 1, P = $\frac{\pi}{4}$: $n \approx \frac{1}{4}S$

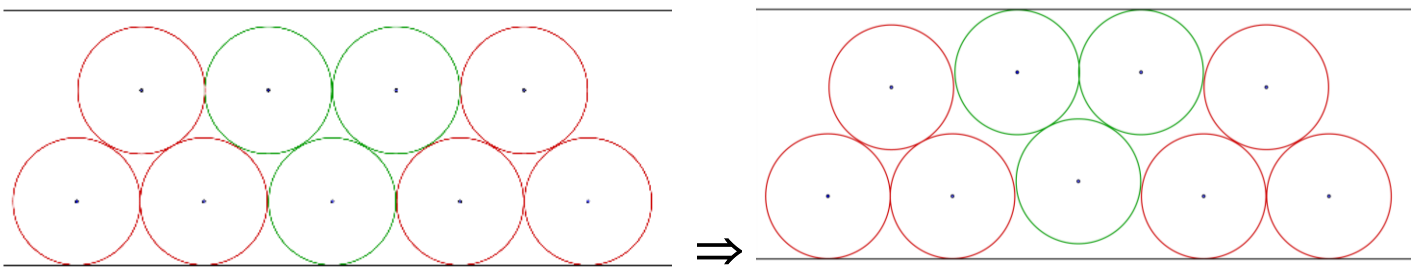
Pour les dispositions 2 et 3, P = $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$: $n \approx \frac{\sqrt{3}}{6}S$

Partie 3 :

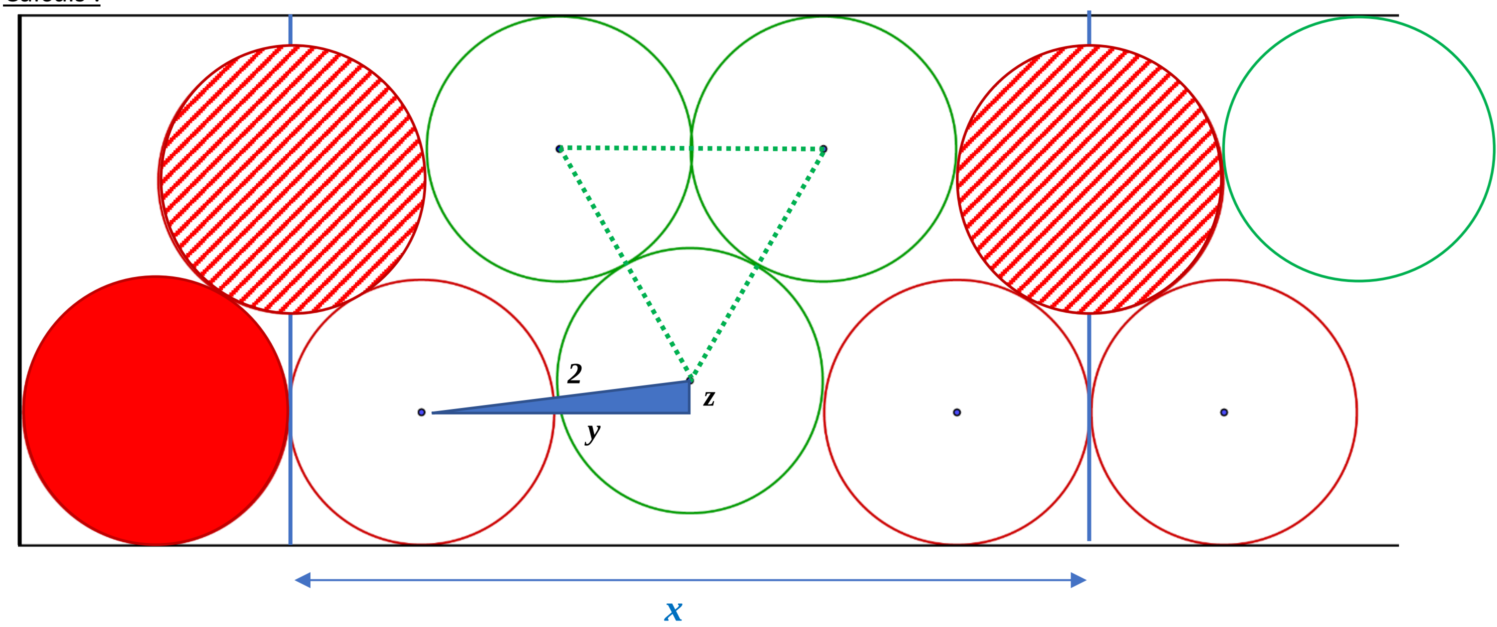
Remarque : on détermine facilement que la disposition 1 permet de ranger 2 x 222 = 444 boîtes, et moins pour les deux autres dispositions. Il faut donc trouver une autre disposition.

Disposition (schéma)

L'idée est de partir d'une disposition type 3 et d'utiliser au maximum l'espace supérieur laissé vide en rapprochant les boîtes par groupe de 3



Calculs :



Après le 1er disque (plein), soit sur une longueur de 442, on un a un découpage périodique de longueur x.

Calcul de x : avec les notations du schéma ci-dessus on a : $x = 2 + 2y$ or, dans le sens de la hauteur on a :

$1 + z + \sqrt{3} + 1 = 4$ donc $z = 2 - \sqrt{3}$ d'où (théorème de Pythagore) $y = \sqrt{2^2 - z^2} = \sqrt{4 - (7 - 4\sqrt{3})} = \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$

On en déduit donc que $x = 2 + 2\sqrt{4\sqrt{3} - 3}$

Calcul du nombre de disques : On a donc $\frac{442}{x} \approx 74{,}11$ découpes périodiques sur toute la longueur.

or à chaque découpe on peut associer 5 disques entiers + 1 disque hachuré, soit 6 disques, d'où un total de :
1 (1er disque plein) + 74 × 6 = 445 disques.

Remarque : la longueur restante après ce découpage est $444 - (2 + 74\,x) \approx 0{,}67 < 1$ (rayon) donc insuffisante pour pouvoir compléter le dernier disque hachuré à droite de la dernière découpe… donc pas de 446ème disque !