Olympiades de mathématiques 2019, solutions

Classes de première

1 Triangles à côtés entiers

1.a. Comme $2+2<6$ et $3+6=9$, mais $4+4>5$, uniquement $(4,4,5)$ représente un triangle non aplati. On le construit à la règle et au compas.

1.b. $z<15+19=34$, donc $z\in\{19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33\}$.

1.c. On a automatiquement $z+y>x$ et $z+x>y$, donc il suffit d'ajouter $x+y>z$.

2.a. $z<x+y=18-z$, donc $2z<18$ et $z<9$. $3z\geq x+y+z=18$, donc $z\geq 6$. Bref, $z\in\{6,7,8\}$, voir 2.b.

2.b. $E_{18}=\{(2,8,8),(3,7,8),(4,6,8),(5,5,8),(4,7,7),(5,6,7),(6,6,6)\}$, et le triangle cherché a les sommets $A=(2;8)$, $B=(5;5)$ et $C=(6;6)$.

3.a. $x+y>z$ implique $(x+1)+(y+1)>z+1$.

3.b. $x+y>z$ implique $(x-1)+(y-1)\geq z-1$, mais il faut exclure d'avoir un triangle aplati dans E_p (en particulier $x-1=0$), donc il faut $x+y>z+1$.

3.c. Chaque triangle aplati a un périmètre pair, donc si p est impair alors il n'y a rien à exclure et E_p a le même nombre d'éléments que E_{p+3}.

4.a. Oui : $(673,673,673)$.

4.b. Oui : $(1,1009,1009)$, $(3,1008,1008)$, $(5,1007,1007)$, $\ldots$, $(671,674,674)$, $(675,672,672)$, $\ldots$, $(1009,505,505)$, donc la base est un entier impair entre 1 et 1009 mais différent de 673 : il y a $\frac{1010}{2}-1=504$ solutions.

4.c. D'après le théorème de Pythagore, $z^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow (2019-(x+y))^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 2019^2-2\times 2019\times(x+y)+(x+y)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 2019^2=4038(x+y)-2xy$, mais 2019^2 est impair tandis que $4038(x+y)-2xy$ est pair.

5.a,b. $x+y>z \Leftrightarrow x+y>2022-(x+y) \Leftrightarrow 2(x+y)>2022 \Leftrightarrow x+y>1011 \Leftrightarrow x+y\geq 1012$ et $y\leq z \Leftrightarrow y\leq 2022-(x+y) \Leftrightarrow x+2y\leq 2022$.

5.c,d. Comme dans la question 2.b le triangle cherché a les sommets $A=(2;1010)$, $B=(506;506)$ et $C=(674;674)$. Les côtés $[AB]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires et de longueur $504\sqrt{2}$ et $168\sqrt{2}$, respectivement. L'aire cherchée vaut donc $\frac{1}{2}\times 504\sqrt{2}\times 168\sqrt{2}=84672$. Sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ on trouve 505, 169 et 337 points à coordonnées entières, respectivement. Par conséquent, $j=505+169+337-3=1008$ et $i=84672-\frac{1008}{2}+1=84169$. Finalement, $|E_{2019}|=|E_{2022}|=i+j=85177$.

6. Il suffit de faire varier la variable x entre 1 et p et la variable y entre x et p. On pose alors $z = p - x - y$ et on vérifie si $y \leq z$ et $z < x + y$.

Remarque. Regardons les points (x, y) à coordonnées entières vérifiant $0 \leq x \leq y$. Pour chaque entier naturel q, soit $f(q)$ le nombre de ces points vérifiant, de plus, $x + y \leq q$; et soit $g(q)$ le nombre de ces points vérifiant, de plus, $x + 2y \leq 2q$. Si $p = 2q$, alors nous avons vu que $|E_{p-3}| = |E_p| = g(q) - f(q)$. La suite $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$ est 1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, 20, 25, 30, $\ldots$, donc les différences consécutives sont 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, $\ldots$, et on démontre facilement que

$$f(q) = \frac{q^2}{4} + q + 1 - \frac{[2 \nmid q]}{4},$$

où $[2 \nmid q]$ vaut 1 si q est impair, et 0 si q est pair. De même, la suite $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $\ldots$ est 1, 2, 4, 7, 10, 14, 19, 24, 30, 37, 44, $\ldots$, donc les différences consécutives sont 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, $\ldots$, et on démontre facilement que

$$g(q) = \frac{q^2}{3} + q + 1 - \frac{[3 \nmid q]}{3},$$

où $[3 \nmid q]$ vaut 1 si q n'est pas divisible par 3, et 0 si q est divisible par 3. Finalement, pour $p = 2q$,

$$|E_{p-3}| = |E_p| = \frac{q^2}{12} - \frac{[3 \nmid q]}{3} + \frac{[2 \nmid q]}{4}$$

est l'entier le plus proche de $p^2/48$, par exemple $2022^2/48 = 85176,75$, donc $|E_{2019}| = |E_{2022}| = 85177$.

2 Premières fois

1. $\triangle(p^2) = \triangle(p \times p) = \triangle(p) \times p + p \times \triangle(p) = 2p$. $\triangle(p^3) = \triangle(p^2 \times p) = \triangle(p^2) \times p + p^2 \times \triangle(p) = 2p \times p + p^2 = 3p^2$. De façon générale, $\triangle$ choisit un facteur premier quelque part (dans un produit $a \times b$ dans a ou dans b) et le remplace par 1. En particulier, $\triangle(p^n) = n \times p^{n-1}$.

2.a. $\triangle(p^m \times q^n) = \triangle(p^m) \times q^n + p^m \times \triangle(q^n) = m \times p^{m-1} \times q^n + p^m \times n \times q^{n-1} = (mq + np)p^{m-1}q^{n-1}$.

2.b. $\triangle(10^n) = \triangle(2^n \times 5^n) = (5n + 2n)2^{n-1}5^{n-1} = 7n \times 10^{n-1}$ est bien un multiple de 7.

3. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\triangle(p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}) \\
&= \triangle(p_1^{\alpha_1}) \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} \times \triangle(p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}) \\
&= \triangle(p_1^{\alpha_1}) \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} \times \triangle(p_2^{\alpha_2}) \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + \cdots + p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times \triangle(p_k^{\alpha_k}) \\
&= \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + p_1^{\alpha_1} \times \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} + \cdots + p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times \alpha_k p_k^{\alpha_k - 1} \\
&= \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \cdots + \alpha_k \times q_k,
\end{aligned}$$

donc de nouveau, $\triangle$ choisit un facteur premier quelque part (dans un produit $a \times b$ dans a ou dans b) et le remplace par 1.

4. Soit $a = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}$ (on admet ici $\alpha_i = 0$ ou $\beta_i = 0$) et donc $a \times b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k + \beta_k}$. Alors $\triangle(a) = \alpha_1 \times \frac{a}{p_1} + \cdots + \alpha_k \times \frac{a}{p_k}$, $\triangle(b) = \beta_1 \times \frac{b}{p_1} + \cdots + \beta_k \times \frac{b}{p_k}$

et $\triangle(a\times b) = (\alpha_1+\beta_1)\times\frac{a\times b}{p_1}+\cdots+(\alpha_k+\beta_k)\times\frac{a\times b}{p_k}$, donc $\triangle(a\times b)=\triangle(a)\times b + a\times\triangle(b)$. De plus, pour tout nombre premier p, $\triangle(p^1) = 1\times\frac{p}{p} = 1$.

5.a. $\triangle(2^2\times 3) = 2\times 2\times 3 + 2^2\times 1 = 16$, $\triangle(2^3\times 7) = 3\times 2^2\times 7 + 2^3\times 1 = 92$ et $\triangle(7\times 11\times 13) = 11\times 13 + 7\times 13 + 7\times 11 = 311$.

5.b,c,d. Les solutions de $\triangle(x) = 0$ sont 0 et 1. Les solutions de $\triangle(x) = 1$ sont tous les nombres premiers p. Cependant, si x est divisible par $p\times q$ avec p, q premiers (éventuellement $p = q$), alors $\triangle(x)\geq p+q\geq 4$. Les nombres 2 et 3 n'ont donc pas d'antécédent par $\triangle$.

5.e. Non, $\triangle(12) = 16$.

6.a. $\triangle(p\times q) = \triangle(p)\times q + p\times\triangle(q) = q+p$.

6.b. Non, $\triangle(2\times 2) = 4$, mais $\triangle(2)+\triangle(2) = 2$.

7.a. Non, $\triangle(2+2) = 4$, mais $\triangle(2)+\triangle(2) = 2$.

7.b. $\triangle(ka+kb) = \triangle(k\times(a+b)) = \triangle(k)\times(a+b)+k\times\triangle(a+b) = \triangle(k)\times(a+b)+k\times(\triangle(a)+\triangle(b)) = \triangle(k)\times a + k\times\triangle(a)+\triangle(k)\times b + k\times\triangle(b) = \triangle(ka)+\triangle(kb)$.

8.a. Si $m = k\times p^p$, alors $\triangle(m) = \triangle(k)\times p^p + k\times p\times p^{p-1} = (k+\triangle(k))\times p^p$.

8.b. Si $n = k\times p^\alpha$ (ici k n'est pas divisible par p), alors $\triangle(n) = \triangle(k)\times p^\alpha + k\times\alpha\times p^{\alpha-1} = (p\triangle(k)+k\alpha)\times p^{\alpha-1}$. Comme $k\alpha$ n'est pas divisible par p (mais $p\triangle(k)$ est divisible par p), $p\triangle(k)+k\alpha$ n'est pas divisible par p non plus, et l'exposant cherché est bien $\alpha-1$.

9. $x = 0$ est une solution de l'équation $\triangle(x) = x$, et $x = 1$ ne l'est pas. Si $x > 1$ est une solution et p premier divise x, alors 8.b implique que p^p doit diviser x, c'est-à-dire $x = k\times p^p$. Mais alors $\triangle(x) = (k+\triangle(k))\times p^p$, donc $\triangle(x) = x \Leftrightarrow k\times p^p = (k+\triangle(k))\times p^p \Leftrightarrow k = k+\triangle(k) \Leftrightarrow \triangle(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = p^p$. Les seules solutions sont donc 0 et p^p pour chaque nombre premier p.

3 AGADADAGA

1. Ce sont les mots sans A.

2. *AGADADAGA G AGADADAGA D AGADADAGA D AGADADAGA G AGADADAGA*

3. Après n clics, il y a 5^n lettres A. Pour que $5^n > 10^9$, il faut $n = 13$ au minimum.

4. Après 20 clics, il y a 5^{20} lettres A, donc $5^{20}-1$ lettres D ou G, donc $(5^{20}-1)/2 = 4,768\times 10^{13}$ lettres D.

5. *ADADAGA*

6.

7. *ADAGAGAADADAGA*

8.a. La largeur est 1.

8.b. Les largeurs possibles sont 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 11, mais pas 10.

4 Se suivre sans perdre un chiffre

1.1.a,b. Il n'y a qu'une seule suite 1-complète : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Elle est minimale et de longueur 10.

1.2. Si $k \geq 10$ la longueur 1 suffit, par exemple 1234567890.

1.3. Avec une longueur de 1 on ne peut pas couvrir les 10 chiffres, mais la longueur 2 marche : $123456789, 123456790$.

1.4.a. $124, 125, 126, 127, 128, 129, 130$.

1.4.b. On a au plus un passage de dizaine. Si ce passage est même un passage de centaine, alors les chiffres des dizaines sont perdus, car ils apparaissent déjà dans les unités (9 et 0). On a donc au plus 6 chiffres d'unité, deux chiffres de dizaines, et un chiffre de centaines, soit 9 chiffres différents et pas 10.

1.5. On trouve les suites $13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ ($k = 2$), $1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240$ ($k = 4$), $12346, 12347, 12348, 12349, 12350$ ($k = 5$), $123457, 123458, 123459, 123460$ ($k = 6$), $1234568, 1234569, 1234570$ ($k = 7$), $12345679, 12345680$ ($k = 8$), et on ne peut pas trouver une longueur plus courte que $10 - k$, car il y a au plus un passage de dizaine (donc deux dizaines différentes), tandis qu'un passage de centaine n'est pas avantageux, car les dizaines ne servent alors à rien (elles apparaissent déjà dans les unités : 9 et 0).

2.1. On a 9 possibilités pour le chiffre le plus à gauche (tout sauf 0), puis 9 possibilités pour le deuxième chiffre (qui doit être différent du premier chiffre déjà choisi), puis 8 possibilités pour le troisième chiffre (différent des deux chiffres déjà choisis), etc. Au total, il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9 \times 9!$ suites 10-complètes minimales.

2.2.a. Sans passage de dizaine, on aurait au plus 6 unités différentes, puis 3 chiffres supplémentaires pour les dizaines, centaines et milliers, soit 9 chiffres au total et pas 10. Par conséquent, le chiffre des unités de a vaut 5, 6, 7, 8 ou 9 (5 choix).

2.2.b. Pour chaque $u \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ le chiffre des dizaines de a peut être $u - 2$, $u - 3$ ou $u - 4$ (3 choix) pour que les deux chiffres des dizaines soient différents des six chiffres des unités.

2.2.c,d. Puisque les unités et dizaines couvrent déjà $6 + 2 = 8$ chiffres différents, nous avons 2 choix pour les centaines et un dernier choix pour les milliers, si nous voulons obtenir une suite 4-complète minimale.

2.2.e. Le nombre de suites 4-complètes minimales est donc $5 \times 3 \times 2 \times 1 = 30$.

2.3. Comme dans la question précédente, $u \in \{k + 1, k + 2, \ldots, 9\}$ doit être le chiffre des unités de a, ce qui donne $9 - k$ choix. Pour chaque $u \in \{k + 1, k + 2, \ldots, 9\}$ le chiffre des dizaines de a doit être un élément de $\{u - 2, u - 3, \ldots, u - k\}$ ($k - 1$ choix). Il restent alors $k - 2$ chiffres possibles pour les centaines, puis $k - 3$ choix pour les milliers, etc.

2.4. Commençons avec le cas sans passage de dizaine. Si les deux unités sont 0 et 1, alors nous avons $8!$ possibilités pour ordonner les 8 autres chiffres. Si les deux unités sont 1 et 2, alors nous avons seulement $7 \times 7!$ possibilités pour ordonner les 8 autres chiffres, car nous n'avons que 7 choix pour le premier chiffre : il doit être différent de 0. En général, si les deux unités sont u et $u + 1$ avec $u \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nous avons $7 \times 7!$ choix pour ordonner les autres chiffres. Au total, il y a donc $8! + 8 \times 7 \times 7! = 8 \times 8!$ options sans passage de dizaine.

Si nous avons un passage de centaine (de 99 à 00), alors il nous reste 7 places pour couvrir 8 chiffres : forcément deux chiffres avec les centaines, dont le premier chiffre vaut 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 (7 choix). On peut alors ordonner les 6 autres chiffres de 6! façons différentes, ce qui donne $7 \times 6! = 7!$ choix pour un passage de centaine. De même, si les unités valent 9 et 0, mais dans les dizaines, on réutilise l'un de ces deux chiffres en prenant 8 et 9 ou bien 0 et 1, alors il restent 7! choix pour les 7 autres chiffres. Tous ces trois cas donnent donc $3 \times 7!$ options.

Enfin, il nous reste le cas où les unités sont 9 et 0, et les dizaines sont u et $u+1$ avec $u \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Pour l'un des 7 premiers chiffres (7 choix), on peut alors réutiliser 9 ou l'un des deux chiffres des dizaines (3 choix) tout en permutant les six chiffres qui restent (6! choix) : cela donne $3 \times 7!$ choix. Pour l'un des 7 premiers chiffres sauf le tout premier (6 choix), on peut aussi réutiliser 0, conduisant à $6 \times 6!$ choix supplémentaires. Finalement, il nous reste le cas où l'on ne réutilise ni les chiffres des unités, ni les chiffres des dizaines. Il nous restent donc 6 chiffres pour 7 places, c'est-à-dire un chiffre sera utilisé à deux places. On peut choisir ces deux places de $7 \times 6/2$ façons, puis attribuer nos 6 chiffres de 6! façons, donnant $7 \times 6/2 \times 6! = 3 \times 7!$ choix. Tous ces cas donnent donc $7 \times (3 \times 7! + 6 \times 6! + 3 \times 7!) = 48 \times 7!$ options.

Le nombre de suites 9-complètes minimales est donc $8 \times 8! + 3 \times 7! + 48 \times 7! = (64+3+48) \times 7! = 115 \times 7! = 5 \times 23 \times 7! = 23 \times 7 \times 3^2 \times 2^2 \times 10^2 = 579600$.

5 Triangles en somme

1.a,b. $S_2 = 3$, $S_3 = 8$, $S_4 = 20$, $S_5 = 48$, $S_6 = 112$.

2.a. $(p-1) + p = 2p - 1$, $p + (p+1) = 2p + 1$, $(2p+1) - (2p-1) = 2$.

2.b,c. Si la différence entre deux entiers placés côte à côte est égale à d, alors on peut les écrire sous la forme $p - d$, p, $p + d$. Dans la ligne suivante, on aura alors $2p - d$ et $2p + d$ côte à côte, mais leur différence vaut $2d$. Cette diffrence double donc chaque ligne. Dans la troisième, elle vaut 2^2, et dans la p-ième, elle vaut 2^{p-1}.

2.d. Chaque ligne suivante contient un entier de moins, donc la p-ième ligne contient $n-(p-1)$ entiers.

2.e. Par définition, le premier élément de la p-ième ligne est S_p. Pour obtenir les $n-p$ éléments suivants, il faut ajouter la différence 2^{p-1} déjà calculée.

3.a,b,c. Par définition, $S_n = S_{n-1} + (S_{n-1} + 2^{n-2}) = 2S_{n-1} + 2^{n-2}$, en particulier $S_{20} = 5505024$.

4.a,b,c. Nous avons

$$S_n = 2S_{n-1} + 2^{n-2} \Leftrightarrow \frac{S_n}{2^{n-2}} = \frac{S_{n-1}}{2^{n-3}} + 1,$$

donc la suite des $\frac{S_n}{2^{n-2}}$ est arithmétique de raison 1, et on calcule de proche en proche que

$$\frac{S_n}{2^{n-2}} = n + 1 \Leftrightarrow S_n = (n+1) \times 2^{n-2}.$$

En particulier, $S_6 = 7 \times 2^4 = 112$, $S_{20} = 21 \times 2^{18} = 5505024$ et $S_{2019} = 2020 \times 2^{2017}$.