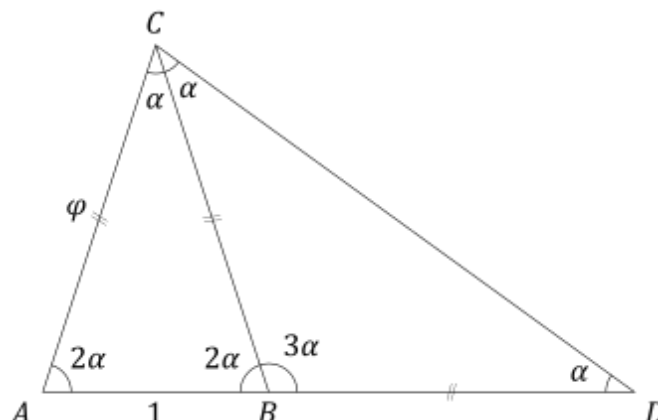


Exercice 1 — De l'or de côté – Corrigé

Partie A — Une longueur très spéciale

On construit deux triangles ABC et BCD isocèles respectivement en C et en B comme dans la figure ci-dessous en respectant les angles indiqués. On choisit $AB=1$ et l'on pose $\varphi=AC$.



A.1. a) Déterminer la valeur de α .

La somme des mesures des angles d'un triangle est de 180° donc dans le triangle ABC :

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180 \Leftrightarrow 5\alpha = 180 \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{5} = 36^\circ$$

b) Démontrer que A, B et D sont alignés.

$\widehat{ABD} = 5\alpha = 180^\circ$ donc les points A, B et D sont alignés.

c) Déterminer, en justifiant, une expression de CD de la forme $a+b\varphi$ avec a et b entiers.

Le triangle ABC est isocèle en C donc $BC = AC = \varphi$.

Le triangle BCD est isocèle en B donc $BD = BC = \varphi$

Les points A, B et D sont alignés donc $AD = AB + BD = 1 + \varphi$

Enfin le triangle ADC est isocèle en D donc $CD = AD = 1 + \varphi$.

A.2. a) Expliquer pourquoi ABC et ADC sont semblables.

Dans le triangle ABC : $\widehat{ACB} = \alpha$; $\widehat{CAB} = 2\alpha$; $\widehat{ABC} = 2\alpha$

Dans le triangle ADC : $\widehat{ADC} = \alpha$; $\widehat{DCA} = 2\alpha$; $\widehat{ACD} = 2\alpha$

Or deux triangles sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

Donc ABC et ADC sont semblables.

b) En déduire que $\varphi^2 = 1 + \varphi$

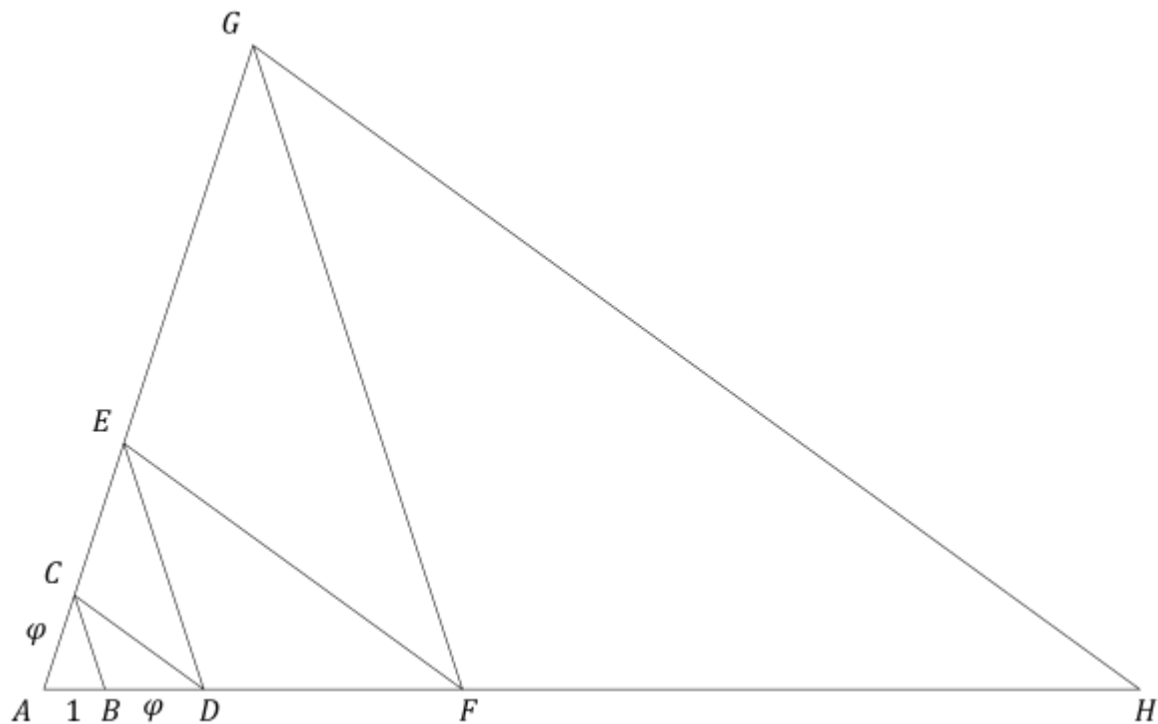
ABC et ADC sont semblables alors $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} = \left(\frac{BC}{AD}\right)$ donc $\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1+\varphi}$ et donc $\varphi^2 = 1 + \varphi$

Partie B — Toujours plus de triangles

On complète la figure précédente en y ajoutant une suite de triangles isocèles avec :

- $ABC, BCD, CDE, DEF, EFG, FGH$ isocèles respectivement en C, B, C, D, E, F ;
- A, B, D, F et H alignés ;
- A, C, E et G alignés.

On obtient la figure :



B.1. a) Démontrer que (BC) , (DE) et (FG) sont parallèles entre elles.

Dans le triangle ABC , $\widehat{CAB}=2\alpha$ et $\widehat{ACB}=\alpha$.

Les points A , C et E sont alignés donc $\widehat{ACE}=180=5\alpha$. Or $\widehat{BCD}=\alpha$ donc $\widehat{DCE}=3\alpha$.

Et donc dans le triangle DCE isocèle en C , l'angle $\widehat{CED}=\widehat{CDE}=\alpha$.

Dans le triangle AED , $\widehat{EAD}=2\alpha$ et $\widehat{AED}=\alpha$.

Par suite les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AED}$ sont correspondants et égaux donc les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

DE même $\widehat{AGF}=\alpha$ donc les droites (BC) , (DE) et (FG) sont parallèles entre elles.

b) Démontrer que (CD) , (EF) et (GH) sont parallèles entre elles.

Les points B , D et F sont alignés donc $\widehat{BDF}=180=5\alpha$. Or $\widehat{BDC}=\alpha$ et $\widehat{CDE}=\alpha$ donc $\widehat{EDF}=3\alpha$.

Comme DEF est isocèle en D et $\widehat{EDF}=3\alpha$ alors $\widehat{EFD}=\widehat{DEF}=\alpha$.

Par suite les angles $\widehat{CDE}$ et $\widehat{DEF}$ sont alternes-internes et égaux, par conséquent les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

De même $\widehat{FGH}=\alpha$ donc les droites (CD) , (EF) et (GH) sont parallèles entre elles.

DE même $\widehat{AGF}=\alpha$ donc les droites (BC) , (DE) et (FG) sont parallèles entre elles.

B.2. Écrire les longueurs suivantes sous la forme $a+b\varphi$ avec a et b entiers naturels :

a) $CD=1+\varphi$ (d'après A.1.c)

Pour la suite, les droites (BC) , (DE) et (FG) sont parallèles entre elles donc les points A , C , E et G sont alignés dans cet ordre.

Et les droites (CD) , (EF) et (GH) sont parallèles entre elles donc les points A , B , D , F et H sont alignés dans cet ordre.

Au vue des égalités d'angles, les triangles ABC , ADC , AED , AGF et AHG sont tous semblables et par conséquent tous isocèles.

b) CDE triangle isocèle en C donc $CD=CE=1+\varphi$.

A , C et E sont alignés donc $AE=AC+CE=1+2\varphi$.

AED est isocèle en E donc $AE=DE=1+2\varphi$.

- c) EDF triangle isocèle en D donc $ED=DF=1+2\varphi$.
 A, D et F sont alignés donc $AF=AD+DF=2+3\varphi$.
 AFE est isocèle en F donc $AF=EF=2+3\varphi$.
- d) GEF triangle isocèle en E donc $EF=EG=2+3\varphi$.
 A, E et G sont alignés donc $AG=AE+EG=3+5\varphi$.
 AGF est isocèle en G donc $AG=FG=3+5\varphi$.
- e) FGH triangle isocèle en F donc $GF=FH=3+5\varphi$.
 A, F et H sont alignés donc $AH=AF+FH=5+8\varphi$.
 AHG est isocèle en G donc $AH=GH=5+8\varphi$.

B.3. Écrire en justifiant soigneusement les longueurs suivantes sous la forme φ^n où n est un entier naturel :

- a) $CD=1+\varphi=\varphi^2$
 b) $DE=1+2\varphi=1+\varphi+\varphi=\varphi^2+\varphi=\varphi(\varphi+1)=\varphi \times \varphi^2=\varphi^3$
 c) $EF=2+3\varphi=1+2\varphi+1+\varphi=\varphi^3+\varphi^2=\varphi^2(1+\varphi)=\varphi^2 \times \varphi^2=\varphi^4$
 d) $FG=3+5\varphi=2+3\varphi+1+2\varphi=\varphi^4+\varphi^3=\varphi^3(1+\varphi)=\varphi^3 \times \varphi^2=\varphi^5$
 e) $GH=5+8\varphi=3+5\varphi+2+3\varphi=\varphi^5+\varphi^4=\varphi^4(\varphi+1)=\varphi^4 \times \varphi^2=\varphi^6$

Partie C – Des décompositions

C.1. Le but de cette question est de construire une suite (a_n) telle que $\varphi^n=a_n+a_{n+1}\varphi$ pour n entier supérieur ou égal à 2.

- a) Indiquer sans justifier les valeurs à choisir pour a_2 et a_3 .

$$\varphi^2=1+\varphi \text{ donc } a_2=1 \text{ et } a_3=1$$

- b) Pour un entier n supérieur ou égal à 2, on suppose que l'on a déterminé les termes a_n et a_{n+1} tels que $\varphi^n=a_n+a_{n+1}\varphi$.

Démontrer l'existence du terme a_{n+2} tel que $\varphi^{n+1}=a_{n+1}+a_{n+2}\varphi$ en exprimant a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} .

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &= \varphi^n \times \varphi = (a_n + a_{n+1}\varphi)\varphi = a_n\varphi + a_{n+1}\varphi^2 \\ &= a_n\varphi + a_{n+1}(1+\varphi) = a_n\varphi + a_{n+1} + a_{n+1}\varphi = a_{n+1} + (a_n + a_{n+1})\varphi \end{aligned}$$

$$\text{Donc } a_{n+2}=a_n+a_{n+1}.$$

- c) Justifier que la suite (a_n) est strictement positive et croissante.

$$a_2>0 \text{ et } a_3>0 \text{ donc } a_4=a_2+a_3>0 \text{ et par suite pour tout } n \geq 2, a_n>0.$$

$$\text{Pour tout } n \geq 2, a_{n+2}-a_{n+1}=a_n>0 \text{ donc la suite } (a_n) \text{ est croissante.}$$

C.2. Compléter le programme de l'annexe 1 pour qu'il calcule et renvoie la valeur du terme a_n pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.

```
def a(n):
    x = y = 1
    for k in range(3, n):
        z = x + y
        x = y
        y = z
    return y
```

Dans la suite on pose $q_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

C.3. a) Indiquer sans justifier les valeurs q_2 , q_3 et q_4 .

$$\begin{array}{lll} a_2=1 & a_3=1 & a_4=2 & a_5=3 & a_6=5 \\ q_2=\frac{a_3}{a_2}=1 & q_3=\frac{a_4}{a_3}=2 & q_4=\frac{a_5}{a_4}=\frac{3}{2} \end{array}$$

b) Démontrer en justifiant soigneusement que pour tout entier n supérieur ou égal à 2:

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}$$

Pour tout $n \geq 2$, $q_{n+1} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1 = \frac{1}{q_n} + 1$

Dans l'annexe 2 on a représenté la droite (D) d'équation $y=x$ ainsi que la courbe C_f de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. On a aussi placé q_2 et q_3 sur l'axe des abscisses, ainsi que q_3 sur l'axe des ordonnées.

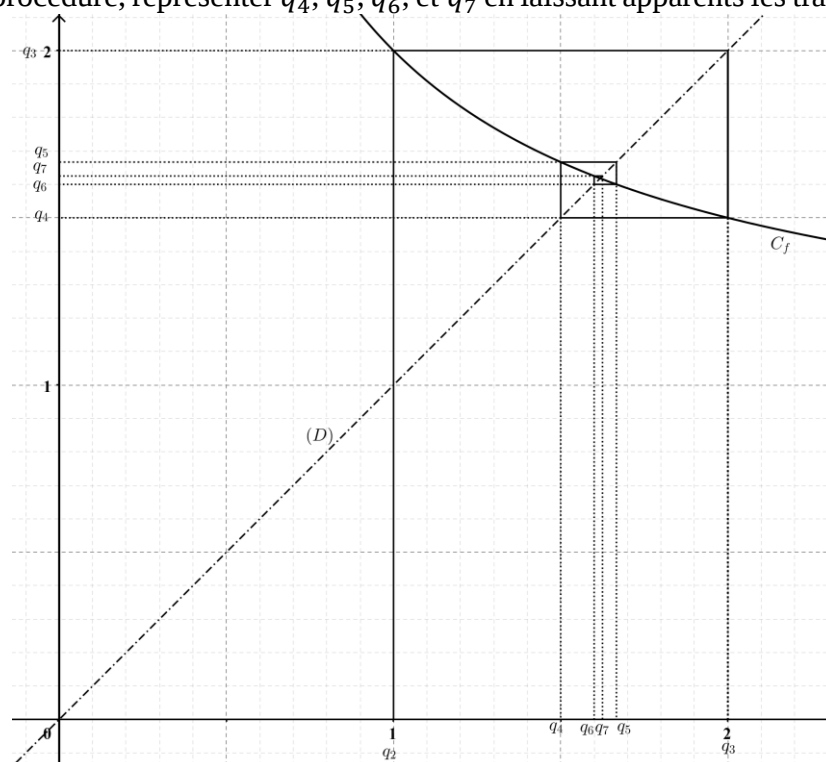
C.4. a) Expliquer la construction géométrique ayant permis, à partir de q_2 , de placer q_3 sur l'axe des ordonnées puis sur l'axe des abscisses.

On place q_3 sur l'axe des ordonnées en traçant l'image de q_2 par la fonction f car $q_3 = f(q_2)$.

Ensuite on reporte q_3 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite (D) d'équation $y=x$.

b) Représenter q_4 sur l'axe des ordonnées et des abscisses.

c) En continuant la procédure, représenter q_4, q_5, q_6 , et q_7 en laissant apparents les traits de construction.



C.5. On admet que les points construits se rapprochent du point d'intersection I entre la courbe de f et la droite $y=x$, et que q_n tend vers l'abscisse du point I quand n tend vers l'infini.

Démontrer soigneusement que les coordonnées de I sont $(\varphi; \varphi)$.

Pour déterminer l'abscisse du point I , on résout l'équation $f(x)=x$.

Pout tout $x > 0$, $1 + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = x \Leftrightarrow x+1 = x^2 \Leftrightarrow x = \varphi$

$f(\varphi) = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi+1}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$ donc les coordonnées de I sont $(\varphi; \varphi)$.