

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2025

Sujet académique

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h) :

Tous les candidats doivent traiter les deux exercices académiques.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 et une annexe à rendre avec la copie.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.



Exercice 1 : Un problème d'aire qui ne manque pas d'air !

Dans un carré ABCD de côté 1, on considère une suite de cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ de centres respectifs $(O_0, O_1, \dots, O_n)$ et de rayons respectifs $(r_0, r_1, \dots, r_n)$, où n est un nombre entier naturel (voir **Figure 1**).

Les cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ sont :

- tangents entre eux.
- tangents aux segments $[AE]$ et $[AF]$.

Le quart de cercle de centre A et de rayon 1 coupe le segment $[AE]$ en H_0 .

On définit A_n comme la **somme** des aires des disques délimités par les cercles $(C_0, C_1, \dots, C_n)$ où n est un nombre entier naturel.

Le problème consiste à calculer la **somme** A des aires de tous les disques C_k , pour k entier naturel.

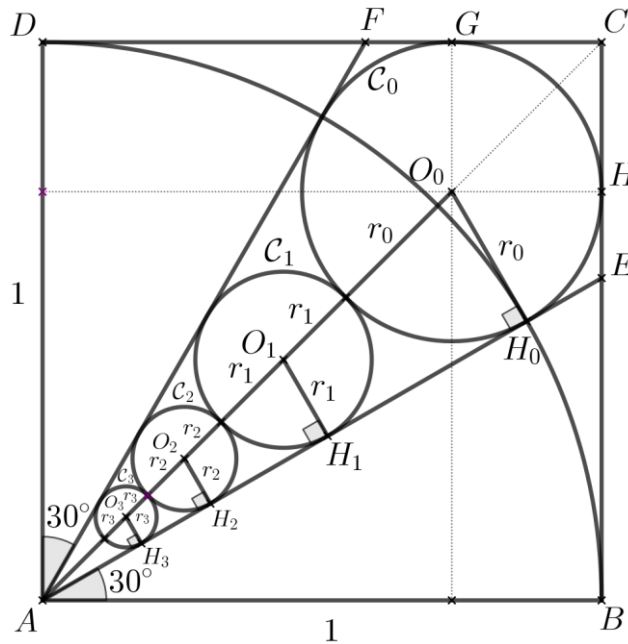


Figure 1 – Représentation géométrique partielle du problème

Partie A – Ne dépassons pas les bornes !

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement de l'aire A , comprise entre celle du disque délimité par le cercle C_0 , désignée par $A_{\min}$ et celle de la zone AECF, désignée par $A_{\max}$:

$$A_{\min} \leq A \leq A_{\max}.$$

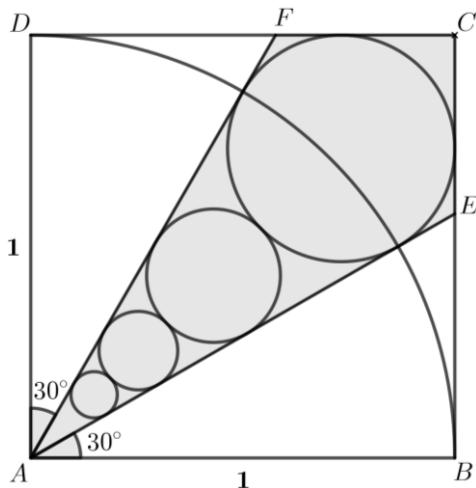


Figure 2 – Majorant : $A_{\max} = A_{AECF}$

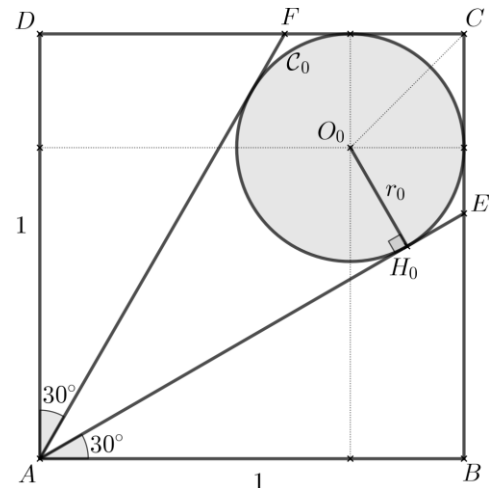


Figure 3 – Minorant : $A_{\min} = A_{C_0}$

A.1 – Recherche d'un majorant :

A.1.1 Montrer que : $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On rappelle que : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ où α est la mesure d'un angle d'un triangle rectangle.

A.1.2 Calculer l'aire des triangles ABE et ADF .

A.1.3 En déduire la valeur exacte de l'aire A_{max} de la zone $AECF$ puis la valeur approchée par excès au centième.

A.2 – Recherche d'un minorant :

A.2.1 Calculer la longueur AC en considérant le carré $ABCD$. En déduire que $0 \leq r_0 \leq \sqrt{2}$

A.2.2 Déterminer O_0C en fonction de r_0 , puis en déduire AO_0 en fonction de r_0 .

On rappelle que H_0 est le point d'intersection entre le segment $[AE]$ et le quart de cercle de centre A et de rayon 1.

A.2.3 En considérant le triangle AH_0O_0 rectangle en H_0 , montrer que r_0 vérifie $r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$

A.2.4 Résoudre l'équation précédente et montrer que $r_0 = 2 - \sqrt{3}$.

A.2.5 En déduire la valeur exacte de l'aire A_{min} du disque délimité par le cercle C_0 puis une valeur approchée par défaut au centième.

A.3 À l'aide de ce qui précède, donner un encadrement de la somme des aires des disques, les valeurs seront données au centième.

Partie B – Des rayons bien rangés et bien alignés !

Dans cette partie, on s'intéressera à la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des rayons des cercles C_n , $n \in \mathbb{N}$ formant l'hypoténuse du triangle AH_0O_0 rectangle en H_0 .

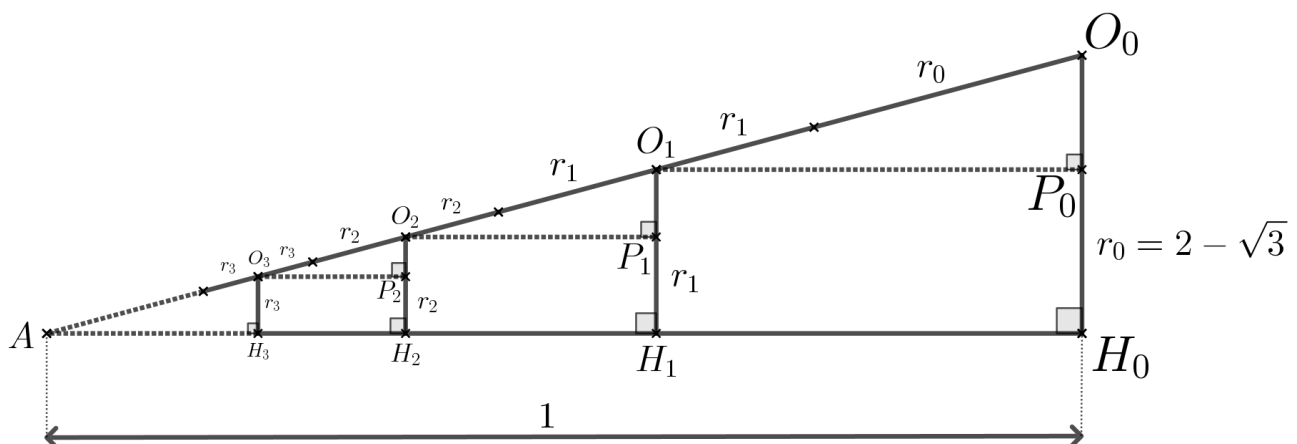


Figure 4 – Suite de triangles

B.1 En s'aidant du résultat de la question **A.2.2**, montrer que $AO_0 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$.

B.2 En remarquant que $AO_1 = AO_0 - O_1O_0$ montrer que $\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$.

En déduire une valeur arrondie à 10^{-4} près du rapport $\frac{r_1}{r_0}$.

B.3 Justifier que les triangles $O_i O_{i+1} P_i$ sont semblables, pour $0 \leq i \leq n$, c'est-à-dire que leurs angles sont égaux deux à deux.

B.4 Exprimer les longueurs des segments $[O_i P_i]$ en fonction de r_i et r_{i+1} .

Les triangles $O_i O_{i+1} P_i$ étant semblables, on a l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{O_i O_{i+1}}{O_i P_i} = \frac{O_{i+1} O_{i+2}}{O_{i+1} P_{i+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

B.5 En déduire les relations suivantes :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \dots = \frac{r_i}{r_{i+1}} = \dots = \frac{r_{n-1}}{r_n} = \frac{r_n}{r_{n+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

B.6 À l'aide des égalités précédentes, montrer qu'il existe un réel q tel que :

$$r_{n+1} = q \times r_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, r_n est le rayon du cercle C_n . On a ainsi établi que la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.

B.7 En utilisant la question **B.6**, **B.2** et une valeur arrondie au dix-millième de r_2 , construire les cercles C_1 et C_2 sur la figure de l'annexe. Sur cette figure, une unité est représentée par 10 cm.

B.8 On pose $u_n = \pi(r_n)^2$, $n \in \mathbb{N}$, montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison q^2 .

B.9 Expliquer pourquoi la **somme** A des aires de tous les disques C_k , pour k entier naturel, vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

On rappelle pour cette question que pour une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la somme S_n des $(n + 1)$ premiers termes vaut :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Exercice 2 : Une aventure clés en main

Lara, une brillante aventurière, explore les ruines d'une civilisation oubliée. Elle trouve d'abord deux clés identiques dans un coffre bien caché. Dans une salle mystérieuse à l'autre bout des ruines, elle découvre un levier à côté d'une majestueuse porte fermée, et des serrures adaptées aux clés qu'elle a trouvées.

Elle réussit à déchiffrer l'inscription suivante :

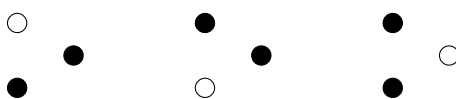
« Pour ouvrir la porte des élus, placer les deux clés chacune dans une serrure puis abaissez le levier. Seules certaines serrures permettent d'ouvrir la porte, les autres empêchent son ouverture. »

Lara remarque que même en insérant les clés elle ne peut pas distinguer les serrures **fonctionnelles**, qui permettent d'ouvrir la porte, des serrures **bloquantes**, qui en empêchent l'ouverture.

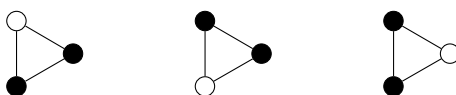
On dit que Lara fait un **essai** quand elle a placé ses deux clés chacune dans une serrure, et qu'elle abaisse le levier. On dit que l'essai **teste** les serrures. Si les deux serrures testées sont fonctionnelles, la porte s'ouvre, l'essai est **réussi**. Si le levier retourne dans sa position de départ sans que la porte ne s'ouvre, l'essai **échoue**, cela signifie qu'au moins une des deux serrures testées est bloquante. Dans ce cas, l'aventurière doit réessayer.

Un ensemble d'essais est **certain** si pour chaque configuration des serrures fonctionnelles et bloquantes au moins un des essais sera réussi. Le **nombre optimal d'essais** est le nombre k tel qu'il existe un ensemble certain de k essais mais il n'existe pas d'ensemble certain avec un nombre d'essais strictement inférieur.

Pour représenter une configuration on peut symboliser les serrures fonctionnelles par ● et les serrures bloquantes par ○. Dans le cas où il y a trois serrures : deux serrures fonctionnelles et une serrure bloquante, alors il y a trois configurations possibles, représentées ci-dessous :



Un essai peut être représenté par un trait reliant les serrures testées. L'ensemble de trois essais représenté ci-dessous est certain puisque pour chaque configuration au moins un essai teste les deux serrures fonctionnelles :



Partie A — Première porte

Dans cette salle, il y a quatre serrures : trois sont fonctionnelles et une est bloquante. Lara numérote au hasard les serrures de 1 à 4 pour pouvoir garder une trace de ses essais. L'essai testant les serrures 1 et 3 sera noté 1 – 3 ou 3 – 1, l'ordre n'a pas d'importance.

- A.1. a) Proposer un ensemble certain d'essais.
b) Justifier qu'un seul essai ne suffit pas à ouvrir la porte pour toutes les configurations.
c) En déduire que le nombre optimal d'essais est 2.
- A.2. Déterminer la probabilité que Lara réussisse à ouvrir la porte à son premier essai si elle place les clés dans des serrures choisies totalement au hasard.

Partie B — Deuxième porte

Lara réussit à ouvrir la porte des élus. Derrière, elle trouve une autre pièce avec la même énigme mais avec plus de serrures. Cette fois, il y a trois serrures fonctionnelles et deux bloquantes. Les serrures sont numérotées de 1 à 5, sans savoir lesquelles sont fonctionnelles ou bloquantes.

- B.1. Dans cette question Lara tente l'ensemble d'essais $\{1 - 2; 3 - 4; 1 - 5\}$ mais ils échouent tous. Proposer des numéros où peuvent se trouver les serrures fonctionnelles.
- B.2. En justifiant soigneusement, décrire un ensemble certain de quatre essais.
- B.3. Soit E un ensemble quelconque de trois essais exactement.

- a) Justifier qu'au moins une serrure a été choisie pour au moins deux essais.
- b) Démontrer qu'il existe une configuration des serrures pour laquelle les trois essais échouent.

B.4. Justifier que le nombre optimal d'essais est 4.

Partie C — Toujours plus de portes

À partir de la salle suivante, et à chaque fois que Lara réussit à ouvrir une porte, elle trouve une énigme similaire avec f serrures fonctionnelles et b serrures bloquantes, où f et b sont des nombres entiers avec $f \geq 2$ et $b \geq 0$.

Une configuration des serrures dans ce cas est appelée $(f; b)$ -configuration, tandis qu'un ensemble certain pour cette énigme est dit $(f; b)$ -certain.

Le nombre d'essais d'un ensemble E est noté $|E|$.

On note $O(f; b)$ le nombre optimal d'essais correspondant à cette situation, c'est-à-dire le plus petit nombre $|E|$ pour E $(f; b)$ -certain.

- C.1.** Dans cette question, $f = b = 3$. Il y a donc 6 serrures dont la moitié sont fonctionnelles.
- a) Déterminer un ensemble $(3; 3)$ -certain de 6 essais.
 - b) Démontrer que $O(3; 3) = 6$. On pourra prendre un ensemble quelconque de 5 essais et se ramener à la situation de la question **B.4**.
- C.2.** a) Démontrer que pour tout $f \geq 2$, $O(f; b) \geq b + 1$.
 b) Démontrer que si $f \geq b + 2$ alors $O(f; b) = b + 1$.
- C.3.** Dans une des salles, Lara trouve un papier avec des inscriptions en partie effacées qui semblent résumer les découvertes d'une personne l'ayant précédée. Ce document est présenté en annexe. Compléter les informations manquantes directement sur l'annexe en suivant la logique utilisée.

Si S est un ensemble de serrures (fonctionnelles ou bloquantes), la **clique** associée à S est l'ensemble de tous les essais testant n'importe quelle paire de serrures de S .

Par exemple, la clique associée à un ensemble de deux serrures est l'essai testant ces deux serrures. La clique associée aux serrures 1, 2, et 3 est $\{1 - 2; 1 - 3; 2 - 3\}$.

Des cliques sont **disjointes** si et seulement si aucune serrure n'est testée par deux cliques.

- C.4.** Démontrer que le seul ensemble $(2; b)$ -certain est la clique associée aux $b + 2$ serrures.
 En déduire que $O(2; b) = \frac{(b+1)(b+2)}{2}$
- C.5.** Le but de cette question est de construire pour tout $f \geq 2$ et $b \geq f - 2$ un ensemble $(f; b)$ -certain d'essais constitué de l'union de $f - 1$ cliques disjointes. On notera $E(f; b)$ cet ensemble d'essais.
- a) Si $b = f - 2$, proposer sans justifier un ensemble de $b + 1 = f - 1$ essais qui convient pour $E(f; b)$.

Dans la suite de cette question, on prend $f \geq 2$ et $b \geq f - 2$, et on suppose déjà construit l'ensemble $(f; b)$ -certain $E = E(f; b)$. On numérote de 1 à $f + b$ les serrures, et on ajoute une serrure qu'on numérottera $f + b + 1$.

- b) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors la serrure $f + b + 1$ est fonctionnelle.

c) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors il y a exactement une serrure fonctionnelle testée par chaque clique de E .

d) Construire un ensemble $E' = E(f; b + 1)$ tel que :

- E' est $(f; b + 1)$ -certain;
- $|E'| = |E| + k$ où k est le nombre de serrures associées à la plus petite clique de E .
- E' est l'union de $f - 1$ cliques disjointes.

Démontrer soigneusement ces trois propriétés.

C.6. Étude de $|E(f; b)|$:

a) Expliquer pourquoi si $f - 1 \leq b < 2(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$.

b) Expliquer pourquoi si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.

c) Démontrer que si $q(f - 1) \leq b < (q + 1)(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + q + 1$.

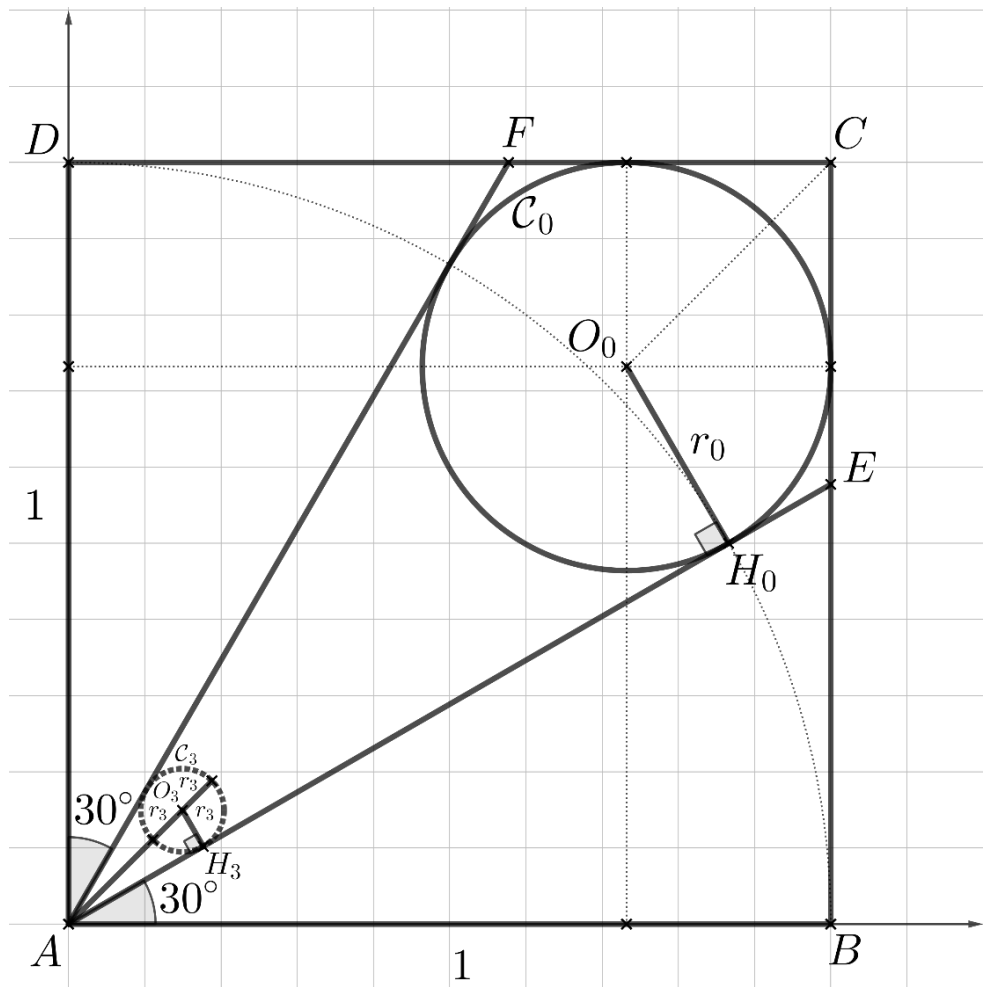
d) En déduire que si $b = q(f - 1) - 1$ avec $q \geq 1$ alors :

$$|E(f; b)| = (f - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + q)$$

Pour aller plus loin après cette épreuve : Il est possible de démontrer la propriété suivante (ce n'est pas demandé aux candidats et ne peut pas être admis pour répondre aux questions précédentes) :

$$O(f; b) = |E(f; b)| = \frac{q(q + 1)(f - 1)}{2} + (q + 1)(r + 1)$$

Annexe exercice 1 : Figure à compléter



Annexe exercice 2 : Le document trouvé par Lara

	$f = 3$	$f = 4$
$b = 3$		
$b = 4$		
$b = 5$		
$b = 6$		