

Exercice 2 : Des nombres figurés triangulaires au triangle de Pascal

Avant de commencer, découvrons la factorielle des entiers naturels :

Cette partie est indépendante des suivantes.

La factorielle d'un entier naturel n non nul est définie par $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par exemple : $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Par convention $0! = 1$

P.1 Calculer : $6!$.

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

P.2 L'affirmation $\frac{100!}{50!} = 2$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

Faux : $\frac{100!}{50!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 50 \times 49 \times 48 \times \dots \times 1}{50 \times 49 \times 48 \times \dots \times 1} = 100 \times 99 \times 98 \times \dots \times 51$

P.3 On considère deux entiers naturels n et k avec $k \leq n$ et on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \dots \times 1}$$

P.3.1 Montrer que pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \times (n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1 \quad \text{car} \quad 0! = 1$$

P.3.2 Calculer $\binom{10}{4}$, $\binom{10}{6}$, $\binom{9}{5}$ et $\binom{9}{6}$.

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \times 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210, \quad \binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \times 4!} = 210, \quad \binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126 \quad \text{et} \quad \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84$$

P.3.3 Démontrer que pour tous les entiers naturels n et k tels que $0 \leq k < n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

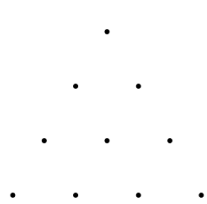
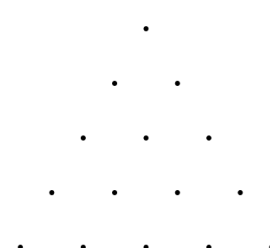
On pourra réutiliser cette propriété utile par la suite.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{et} \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)! \times k + (n-1)! \times (n-k)}{k!(n-k)!}$$

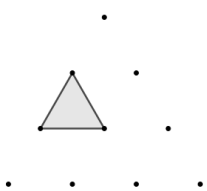
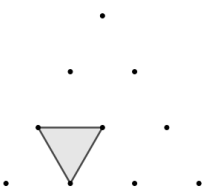
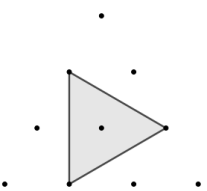
$$\text{Donc} \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)! \times (k + n - k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)! \times n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\text{On en conclut que} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Introduction – Considérons des réseaux à maille triangulaire où n désigne le nombre de points sur un côté du réseau. On appellera taille le nombre de point sur un côté du réseau.

Réseau à maille triangulaire de taille $n = 4$	Réseau à maille triangulaire de taille $n = 5$
	

On se fixe l'objectif de modéliser le nombre de **triangles équilatéraux** E_n dont les sommets sont dans un réseau à maille triangulaire équilatéral de taille n , ou n est un nombre entier naturel. On désignera par Δ_n le nombre de **triangle(s) tête en haut**, par ∇_n le nombre de **triangle(s) tête en bas** et par P_n le nombre de **triangle(s) penché(s)**.

triangle(s) tête en haut	triangle(s) tête en bas	triangle(s) penché(s)
		

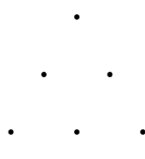
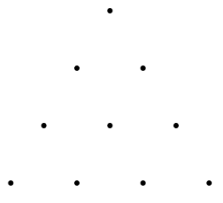
Pour n entier naturel non nul, on introduit :

- $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1) \times n}{1 \times 2}$
- $T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{1 \times 2 \times 3}$

On dit que S_n est le **nombre triangulaire** de taille n et T_n est le **nombre tétraédrique** de taille n .

Pour commencer :

Le tableau suivant liste les comptages des nombres triangulaires ainsi que des triangles équilatéraux dans un réseau de taille n allant de 1 à 4 :

n	1	2	3	4
<i>Réseau à maille triangulaire de taille n fixé</i>				
S_n	1	$1+2=3$	$1+2+3=6$	$1+2+3+4=\frac{4 \times 5}{2}=10$
Δ_n	0	1	4	10
∇_n	0	0	1	3
P_n	0	0	0	2
E_n	0	1	5	15

Partie A – Comptage de triangle tête en haut

A.1. Compléter l'**annexe A.1**. En déduire une expression de Δ_5 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_4$.

Pour obtenir l'expression de Δ_5 on ajoute S_1, S_2, S_3, S_4 , d'où :

$$\Delta_5 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

A.2. Compléter l'**annexe A.2**. En déduire une expression de Δ_6 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_5$. Expliquer alors comment obtenir Δ_6 à partir de Δ_5 .

Pour obtenir Δ_6 à partir de Δ_5 , on rajoute S_5 :

$$\Delta_6 = \Delta_5 + S_5$$

A.3. D'une manière plus générale et à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_{n+1}$. Expliquer comment obtenir Δ_{n+1} à partir de Δ_n .

Pour obtenir Δ_{n+1} à partir de Δ_n , on rajoute S_n :

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + S_n$$

A.4. Sachant que $\Delta_{n+1}=S_1+S_2+...+S_n$ et que les S_n peuvent aussi s'écrire : $S_n=\frac{n^2+n}{2}$
En déduire que :

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= S_1 + S_2 + \dots + S_n \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1^2+1}{2} + \frac{2^2+2}{2} + \dots + \frac{n^2+n}{2} \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1^2}{2} + \frac{2^2}{2} + \dots + \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \dots + \frac{n}{2} \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1}{2}(1^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2}(1+2+\dots+n)\end{aligned}$$

A.5. Sachant que :

$$1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donner une expression sous forme factorisée de Δ_{n+1} et démontrer que $\Delta_{n+1}=T_n$.

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1} &= \frac{1}{2}(1^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2}(1+2+\dots+n) \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} \left(\frac{2n+1}{3} + \frac{3}{3}\right) \\ \Delta_{n+1} &= \frac{1}{12} n(n+1)(2n+4) \\ \Delta_{n+1} &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = T_n\end{aligned}$$

A.6. À l'aide de la question **A.5.** précédente, en déduire une expression de Δ_n sous forme factorisée.

$$\Delta_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

A.7. On admet que :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Démontrer que :

$$S_n = \binom{n+1}{2} \qquad \Delta_{n+1} = T_n = \binom{n+2}{3}$$

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} = \frac{(n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1}{2 \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{(n+1) \times n}{2} = S_n$$

$$\binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times \dots \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{6} = T_n = \Delta_{n+1}$$

Partie B – Comptage de triangle tête en bas et penchés

B.1. Compléter l'**annexe B.1**. En déduire les expressions de ∇_5 et ∇_6 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_4$.

$$\nabla_5 = S_1 + S_3 \text{ et } \nabla_6 = S_2 + S_4$$

B.2. L'**annexe B.2** expose le comptage des triangles penchés pour $n=5$ et met en évidence une symétrie axiale dans le comptage de P_5 .

REMARQUE : D'après les figures exposées : $P_5 = 2(S_1 + S_2) = 2T_2$

Compléter l'**annexe B.2** et exprimer P_6 à l'aide des nombres triangulaires S_1, S_2, S_3 , puis à l'aide des nombres tétraédriques T_1, T_2, T_3 .

De la même manière : $P_6 = 2S_3 + 2S_2 + 2S_1 + 2S_1 = 2(T_1 + T_3)$

B.3. On désignera par ∇P_5 le nombre de triangle tête en bas et penchés pour $n=5$.
Démontrer que :

$$\nabla P_5 = S_1 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_2 + S_3)$$

D'après B.1. $\nabla_5 = S_1 + S_3$ **et d'après B.2.** $P_5 = 2(S_1 + S_2)$

D'où $\nabla P_5 = S_1 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_2 + S_3)$

B.4. Pour $n=6$, exprimer ∇P_6 à l'aide des nombres tétraédriques T_1, T_2, T_3 et T_4

On a $\nabla_6 = S_2 + S_4$ **et** $P_6 = 2S_3 + 2S_2 + 2S_1 + 2S_1$

Ainsi $\nabla P_6 = S_1 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_2 + S_3) + (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

Donc $\nabla P_6 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$

B.5. Dans le tableau suivant, on a placé sur la ligne $d_0(n)$ les valeurs de la suite (∇P_n) pour n allant de 1 à 6.

On effectue ensuite sur chaque ligne $d_k(n) = d_{k-1}(n+1) - d_{k-1}(n)$ jusqu'à ce que sur une ligne k , deux différences consécutives soient identiques.

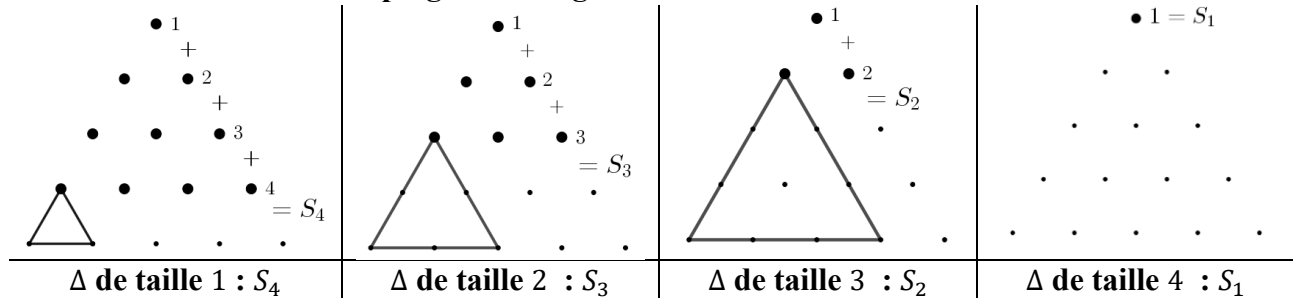
On admet que la suite $(d_4(n))$ est constante. Compléter ainsi ce tableau avec cette règle :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_0(n)$	0	0	1	5	15	35	70	126
$d_1(n)$	0	1	5 - 1 = 4	10	20	35	56	
$d_2(n)$	1	3	6	10	15	21		
$d_3(n)$	2	3	4	5	6			
$d_4(n)$	1	1	1	1				

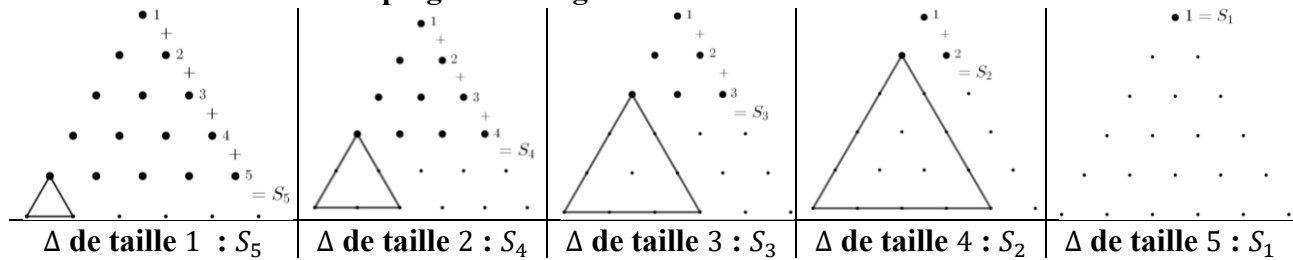
Cette méthode permet ainsi de calculer les valeurs de la suite (∇P_n) de proche en proche.

ANNEXE :

Annexe A.1. – Comptage de triangle tête en haut dans un réseau de taille $n=5$:

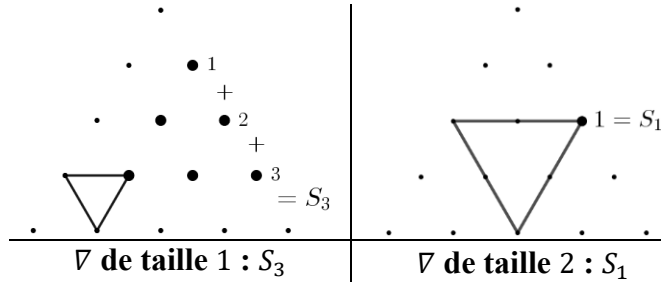


Annexe A.2. – Comptage de triangle tête en haut dans un réseau de taille $n=6$:

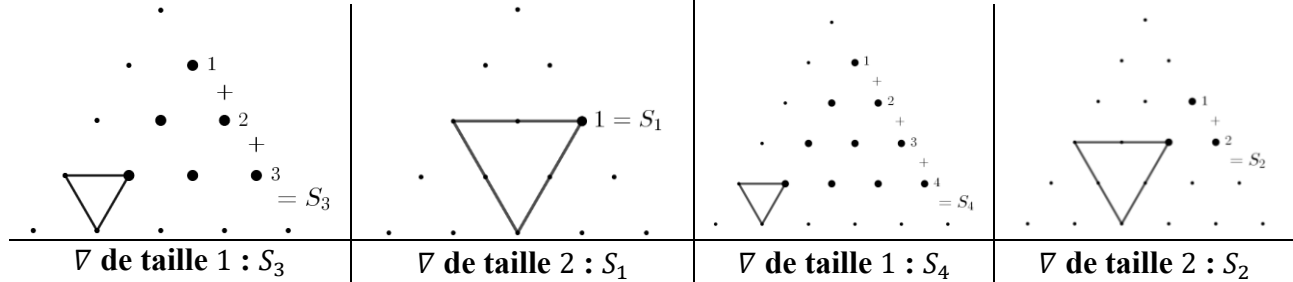


Annexe B.1. – Comptage de triangle tête en bas

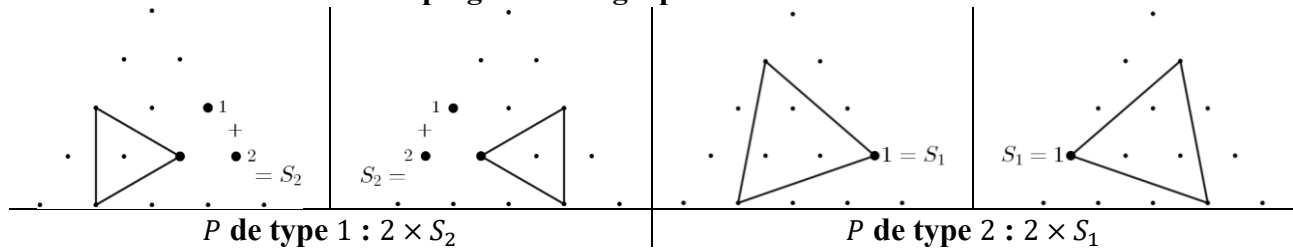
Dans un réseau de taille $n=5$



Dans un réseau de taille $n=6$



Annexe B.2.1 – Comptage de triangle penché dans un réseau de taille $n=5$:



Annexe B.2.2 – Comptage de triangle penché dans un réseau de taille $n=6$:

