

OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES

SESSION 2026

Sujet académique

Déroulement de l'épreuve constituée des exercices académiques (2h) :

L'épreuve est individuelle, tous les candidats doivent traiter les deux exercices académiques.

Le sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8 et une annexe à rendre avec la copie.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient pas formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des recherches qu'ils ont pu entreprendre.

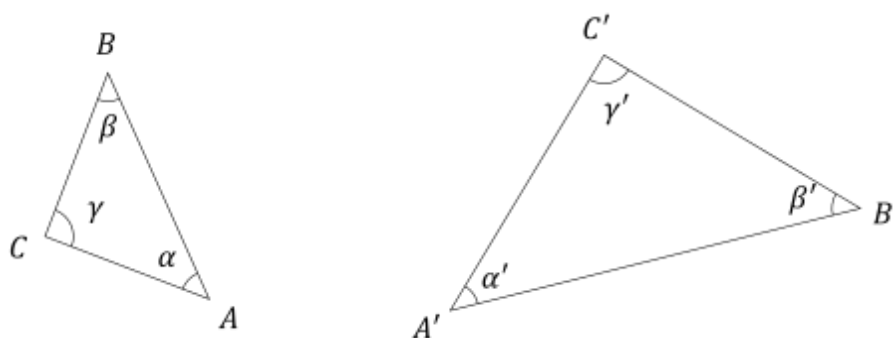
Lorsque le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre et poursuit sa composition.

Les calculatrices sont autorisées en mode examen selon la réglementation en vigueur.

Exercice 1 — De l'or de côté

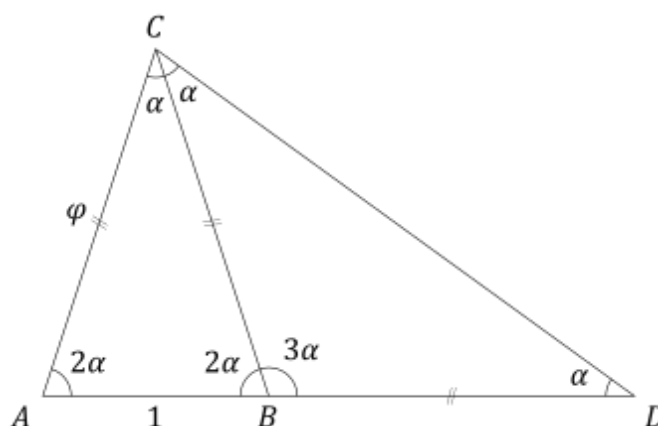
On rappelle que deux triangles sont semblables s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille. Plus précisément, ils sont semblables si leurs angles sont égaux deux à deux.

On a la propriété suivante: deux triangles sont semblables si et seulement si les côtés de l'un sont deux à deux proportionnels aux côtés de l'autre. Par exemple, dans la figure ci-dessous, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables car $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$ et $\gamma=\gamma'$; on a alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.



Partie A — Une longueur très spéciale

On construit deux triangles ABC et BCD isocèles respectivement en C et en B comme dans la figure ci-dessous en respectant les angles indiqués. On choisit $AB=1$ et l'on pose $\varphi=AC$.



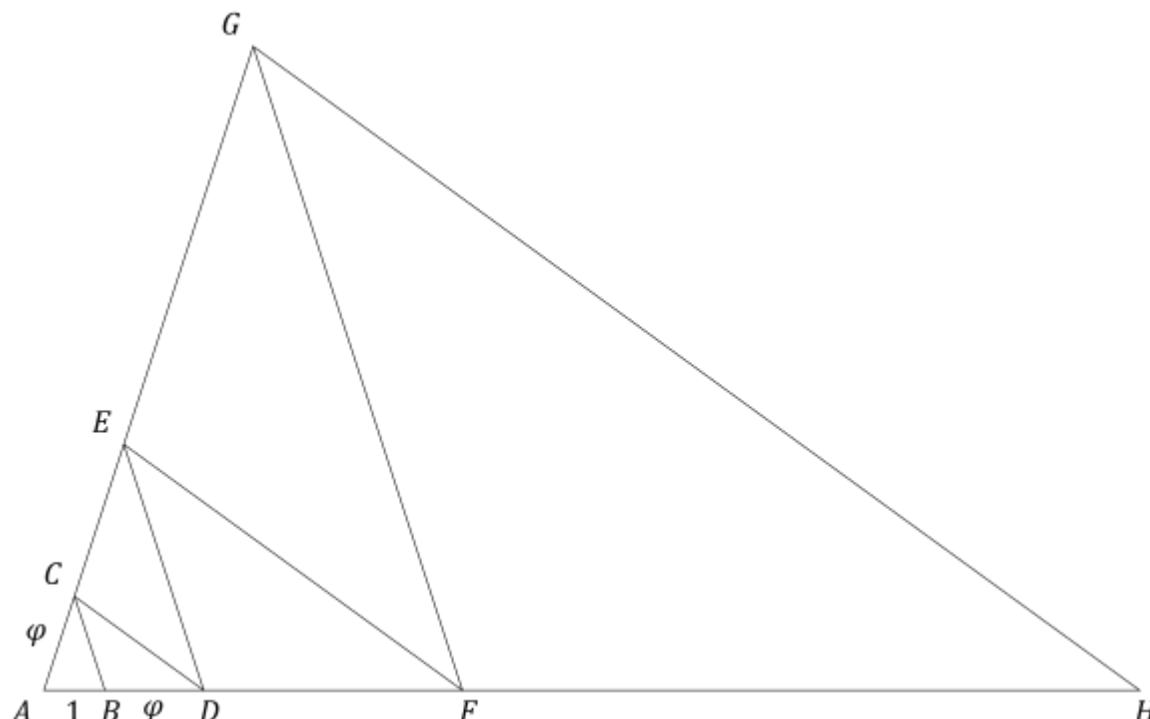
- A.1.** a) Déterminer la valeur de α .
 b) Démontrer que A , B et D sont alignés.
 c) Déterminer, en justifiant, une expression de CD de la forme $a+b\varphi$ avec a et b entiers.
- A.2.** a) Expliquer pourquoi ABC et ADC sont semblables.
 b) En déduire que $\varphi^2=1+\varphi$

Partie B — Toujours plus de triangles

On complète la figure précédente en y ajoutant une suite de triangles isocèles avec :

- ABC , BCD , CDE , DEF , EFG , FGH isocèles respectivement en C , B , C , D , E , F ;
- A , B , D , F et H alignés ;
- A , C , E et G alignés.

On obtient la figure :



- B.1.** a) Démontrer que (BC) , (DE) et (FG) sont parallèles entre elles.
b) Démontrer que (CD) , (EF) et (GH) sont parallèles entre elles.
- B.2.** Écrire les longueurs suivantes sous la forme $a+b\varphi$ avec a et b entiers naturels :
a) CD b) DE c) EF d) FG e) GH
- B.3.** Écrire en justifiant soigneusement les longueurs suivantes sous la forme φ^n où n est un entier naturel :
a) CD b) DE c) EF d) FG e) GH

Partie C – Des décompositions

- C.1.** Le but de cette question est de construire une suite (a_n) telle que $\varphi^n = a_n + a_{n+1}\varphi$ pour n entier supérieur ou égal à 2.
a) Indiquer sans justifier les valeurs à choisir pour a_2 et a_3 .
b) Pour un entier n supérieur ou égal à 2, on suppose que l'on a déterminé les termes a_n et a_{n+1} tels que $\varphi^n = a_n + a_{n+1}\varphi$.
Démontrer l'existence du terme a_{n+2} tel que $\varphi^{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2}\varphi$ en exprimant a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} .
c) Justifier que la suite (a_n) est strictement positive et croissante.
- C.2.** Compléter le programme de l'annexe C.2. pour qu'il calcule et renvoie la valeur du terme a_n pour n entier naturel supérieur ou égal à 2.
- Dans la suite, on pose $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 2.
- C.3.** a) Indiquer sans justifier les valeurs q_2 , q_3 et q_4 .
b) Démontrer en justifiant soigneusement que pour tout entier n supérieur ou égal à 2:

$$q_{n+1} = 1 + \frac{1}{q_n}$$

Dans l'annexe C.4. on a représenté la droite (D) d'équation $y=x$ ainsi que la courbe C_f de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x)=1+\frac{1}{x}$. On a aussi placé q_2 et q_3 sur l'axe des abscisses, ainsi que q_3 sur l'axe des ordonnées.

- C.4.** a) Expliquer la construction géométrique ayant permis, à partir de q_2 , de placer q_3 sur l'axe des ordonnées puis sur l'axe des abscisses.
 b) Représenter q_4 sur l'axe des ordonnées et des abscisses.
 c) En continuant la procédure, représenter q_4, q_5, q_6 , et q_7 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

C.5. On admet que les points construits se rapprochent du point d'intersection I entre la courbe C_f et la droite (D) , et que les valeurs successives de q_n tendent vers l'abscisse du point I quand n tend vers l'infini.

Démontrer soigneusement que les coordonnées de I sont $(\varphi; \varphi)$.

Exercice 2 — Des nombres triangulaires au triangle de Pascal

Préliminaire – Découvrons la factorielle des entiers naturels :

Cette partie est indépendante des suivantes.

La factorielle d'un entier naturel n non nul est définie par $n!=1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par exemple : $3!=1 \times 2 \times 3 = 6$.

Par convention $0! = 1$.

P.1. Calculer : $6!$.

P.2. L'affirmation $\frac{100!}{50!} = 2$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.

P.3. On considère deux entiers naturels n et k avec $k \leq n$ et on définit $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times (k-2) \times \dots \times 1}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = 1$.

b) Calculer $\binom{10}{4}$, $\binom{10}{6}$, $\binom{9}{5}$ et $\binom{9}{6}$.

c) Démontrer que pour tous les entiers naturels n et k tels que $0 \leq k < n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

On pourra réutiliser cette propriété utile par la suite.

Dans toute la suite de l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Considérons des réseaux à maille triangulaire de taille n où n désigne le nombre de points sur un des côtés du réseau et où les triangles de la maille sont équilatéraux, comme dans les exemples ci-dessous.

Réseau à maille triangulaire de taille $n = 4$	Réseau à maille triangulaire de taille $n = 5$

On se fixe l'objectif de modéliser le nombre de **triangles équilatéraux** E_n dont les sommets sont des points d'un réseau à maille triangulaire de taille n . On considère :

Des triangles tête en haut , équilatéraux avec un côté horizontal et le troisième sommet au-dessus	Des triangles tête en bas , équilatéraux avec un côté horizontal et le troisième sommet en-dessous	Des triangles penchés équilatéraux qui ne sont ni tête en haut, ni tête en bas

On désignera par Δ_n le nombre de **triangle(s) tête en haut**, par ∇_n le nombre de **triangle(s) tête en bas** et par P_n le nombre de **triangle(s) penché(s)**. On introduit :

- S_n le **nombre triangulaire** de taille n avec $S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- T_n le **nombre tétraédrique** de taille n avec $T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n}{1 \times 2 \times 3}$

Le tableau suivant liste les comptages des nombres triangulaires ainsi que des triangles équilatéraux dans un réseau de taille n allant de 1 à 4 :

n	1	2	3	4
Réseau à maille triangulaire de taille n fixé				
Nombre triangulaire S_n de taille n	1	$1+2=3$	$1+2+3=6$	$1+2+3+4=\frac{4 \times 5}{2}=10$
Nombre de triangle(s) tête en haut Δ_n	0	1	4	10
Nombre de triangle(s) tête en bas ∇_n	0	0	1	3
Nombre de triangle(s) penché(s) P_n	0	0	0	2
Nombre de triangles équilatéraux E_n	0	1	5	15

Partie A – Comptage de triangles tête en haut

- A.1.** Compléter l'**annexe A.1**. En déduire une expression de Δ_5 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_4$.
- A.2.** Compléter l'**annexe A.2**. En déduire une expression de Δ_6 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_5$. Expliquer alors comment obtenir Δ_6 à partir de Δ_5 .
- A.3.** D'une manière plus générale, expliquer comment obtenir Δ_{n+1} à partir de Δ_n et à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_n$.
- A.4.** On admet que $\Delta_{n+1} = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ et on sait que les S_n peuvent aussi s'écrire $S_n = \frac{n^2+n}{2}$

En déduire que :

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(1^2 + \dots + n^2) + \frac{1}{2}(1 + \dots + n)$$

- A.5.** Sachant que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Donner une expression sous forme factorisée de Δ_{n+1} et démontrer que $\Delta_{n+1} = T_n$.

- A.6.** À l'aide de la question **A.5.** précédente, en déduire une expression de Δ_n sous forme factorisée.

- A.7.** On rappelle la définition donnée dans **P.3.** : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Démontrer que :

$$S_n = \binom{n+1}{2} \qquad \Delta_{n+1} = T_n = \binom{n+2}{3}$$

Partie B – Comptage de triangles tête en bas et penchés

- B.1.** Compléter l'**annexe B.1**. En déduire les expressions de ∇_5 et ∇_6 à l'aide des nombres triangulaires $S_1, S_2, \dots, S_4$.
- B.2.** L'**annexe B.2.1** expose le comptage des triangles penchés pour $n=5$ et met en évidence une symétrie axiale dans le comptage de P_5 . Compléter l'**annexe B.2.2** et exprimer P_6 à l'aide des nombres triangulaires S_1, S_2, S_3 , puis à l'aide des nombres tétraédriques T_1, T_2 et T_3 .
- B.3.** On désignera par ∇P_5 le nombre de triangle tête en bas (∇_5) et penchés (P_5) pour $n=5$.

Démontrer que :

$$\nabla P_5 = S_1 + (S_1 + S_2) + (S_1 + S_2 + S_3)$$

- B.4.** Pour $n=6$, exprimer ∇P_6 à l'aide des nombres tétraédriques T_1, T_2, T_3 et T_4
- B.5.** Dans le tableau de l'**annexe B.5**, on a placé sur la ligne $d_0(n)$ les valeurs de la suite (∇P_n) pour n allant de 1 à 6.

On effectue ensuite sur chaque ligne $d_k(n) = d_{k-1}(n+1) - d_{k-1}(n)$ jusqu'à ce que sur une ligne k , deux différences consécutives soient identiques.

On admet que la suite $(d_4(n))$ est constante. Compléter ainsi le tableau sur l'annexe.

Cette méthode permet ainsi de calculer les valeurs de la suite (∇P_n) de proche en proche.

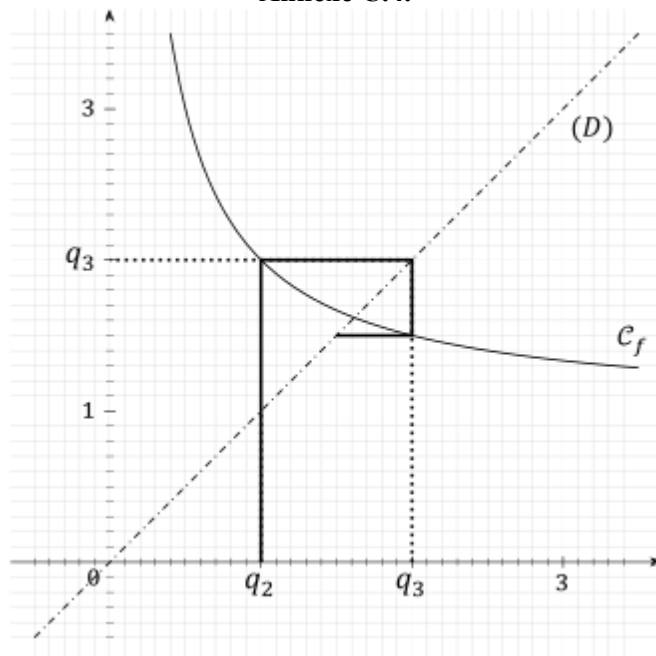
Numéro d'anonymat :

Annexes de l'exercice 1

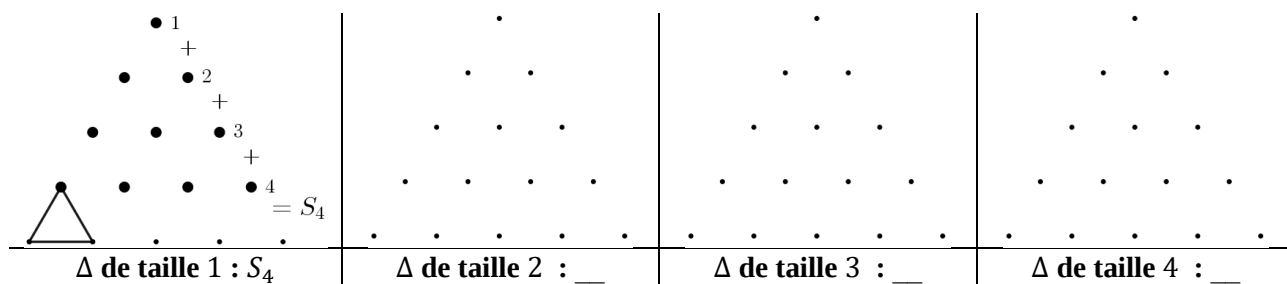
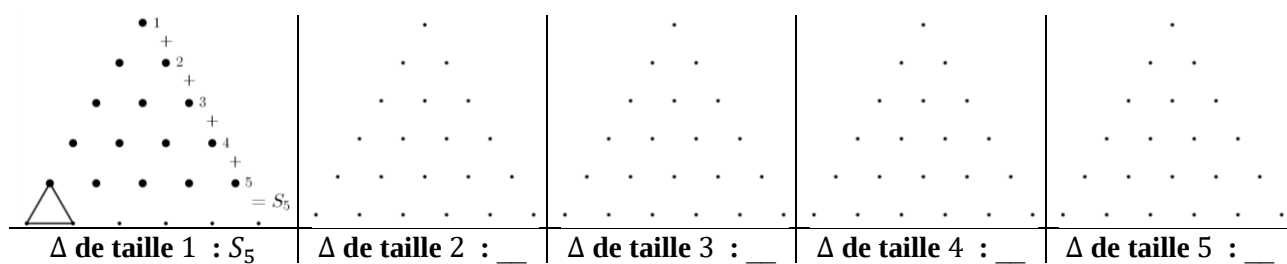
Annexe C.2.

```
def a(n):
    x = y = ...
    for k in range(3, n):
        z = ... + ...
        x = y
        y = ...
    return y
```

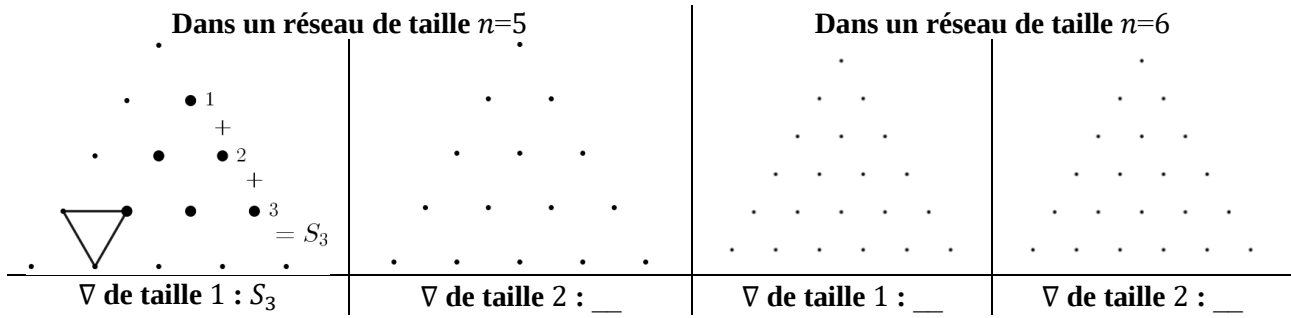
Annexe C.4.



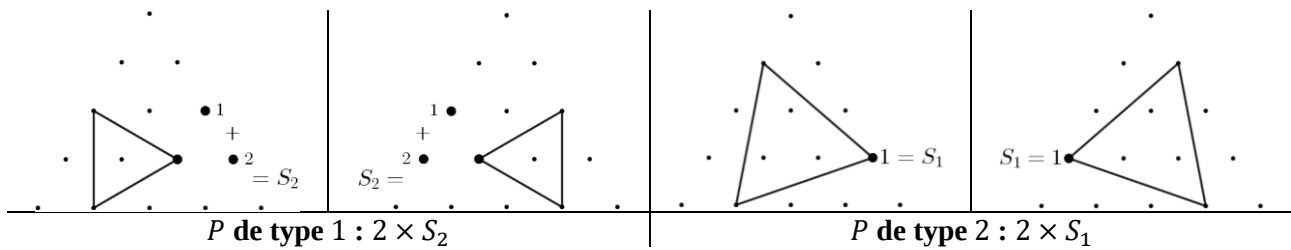
Annexes de l'exercice 2

Annexe A.1. – Comptage de triangle tête en haut dans un réseau de taille $n=5$ Annexe A.2. – Comptage de triangle tête en haut dans un réseau de taille $n=6$ 

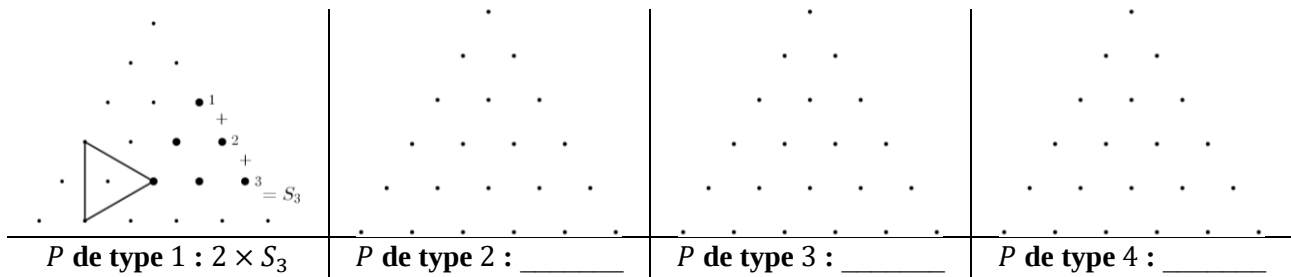
Annexe B.1. – Comptage de triangle tête en bas



Annexe B.2.1 – Comptage de triangle penché dans un réseau de taille $n=5$



Annexe B.2.2 – Comptage de triangle penché dans un réseau de taille $n=6$



Annexe B.5 – Tableau des $d_k(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_0(n)$	0	0	1	5	15	35		
$d_1(n)$	0	1	5 - 1 = 4					
$d_2(n)$	1							
$d_3(n)$	2							
$d_4(n)$	1	1	1	1				