Nombre de multiplications avec un même résultat.

Pour chaque entier naturel x supérieur ou égal à 2, on note M(x) le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que a × b = x.

Exemples :

16 = 1×16 = 2×8 = 4×4 = 8×2 = 16×1, d'où les 5 couples (1 ; 16) ; (2 ; 8) ; (4 ; 4) ; (8 ; 2) ; (16 ; 1) donc M(16) = 5.

17 = 1×17 = 17×1, d'où les 2 couples (1 ; 17) ; (17 ; 1) donc M(17) = 2.

Le but du problème est d'étudier les valeurs de M(x) en fonction de x.

Partie I : Etude de cas.

1) Recopier puis compléter sur votre copie le tableau de valeurs suivant (aucune justification n'est demandée) :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(x)									

2) On rappelle qu'un nombre premier p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ayant exactement deux diviseurs 1 et p.

Premiers exemples : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 …

Démontrer que « M(x) = 2 » équivaut à « x est nombre premier »

3) On rappelle qu'un carré parfait est un entier naturel s'écrivant sous la forme a^2, où a est un entier naturel.

Démontrer que « M(x) est impair » équivaut à « x est un carré parfait ».

4) Justifier que pour tout entier x supérieur ou égal à 2, M(x) est égal au nombre de diviseurs de x.

Partie II : Etude des premiers antécédents de M :

On rappelle que tout entier naturel x supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers, affectés de leur exposant.

Ainsi $\boldsymbol{x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}}$

où $p_1, \dots , p_n$ désignent les différents nombres premiers diviseurs de x, rangés par ordre croissant

$a_1, \dots , a_n$ désignent leurs exposants non nuls respectifs.

Par exemple : $2022 = 2^1 \times 3^1 \times 337^1$ $2023 = 7^1 \times 17^2$ $2024 = 2^3 \times 11^1 \times 23^1$

$2025 = 3^4 \times 5^2$ $2026 = 2^1 \times 1013^1$ $2027 = 2027^1$ (2027 est un nombre premier)

Avec ces notations, on admet que les diviseurs de x sont les entiers naturels s'écrivant sous la forme :

$$\boldsymbol{p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n} \quad \text{avec} \quad 0 \le b_1 \le a_1 \;;\; 0 \le b_2 \le a_2 \;;\; \dots \;;\; 0 \le b_n \le a_n}$$

1) Montrer que M(x) = $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

2) Déterminer M(2022), M(2^{2022}), M(20^{22}).

3) *a*) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 3 sont ceux s'écrivant sous la forme p^2 où p désigne un nombre premier.

b) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 4 sont ceux s'écrivant sous la forme p^3 ou p×q , où p et q désignent des nombres premiers distincts.

c) Montrer que les entiers naturels x tels que M(x) = 5 sont ceux s'écrivant sous la forme p^4 où p désigne un nombre premier.

<u>Partie III : Etude d'antécédents de M</u>

Avec les notations de la Partie II précédente, on rappelle que :

Si $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ alors $M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)\dots(a_n + 1)$

n désigne donc le nombre d'entiers premiers divisant x ($n \geq 1$).

1) *a*) Trouver un entier naturel x tel que $M(x) = 2022$

b) Montrer que pour tout entier naturel y supérieur ou égal à 2, il existe au moins un entier naturel x supérieur ou égal à 2 tel que $M(x) = y$

2) **Dans cette question, on considère l'ensemble des entiers naturels $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ tels que $M(x) = 6000$:**

a) Ecrire 6000 sous la forme de produit de nombres premiers et en déduire que $1 \leq n \leq 8$.

b) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 1$ (c'est-à-dire tel que $x = p_1^{a_1}$)

c) Trouver le plus petit entier naturel x tel que $n = 8$ (c'est-à-dire tel que $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_8^{a_8}$)

d) Cas où $n = 2$:

- Préciser deux nombres entiers x distincts s'écrivant sous la forme 2^a3^b (a et b entiers ≥ 1) tels que $M(x) = 6000$.
- Trouver le <u>nombre</u> d'entiers x de la forme 2^a3^b avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = 6000$.

N.B. : Dans cette question, on demande uniquement le <u>nombre</u> d'entiers x de la forme 2^a3^b tels que $M(x) = 6000$, mais il n'est pas demandé de préciser les entiers x correspondants.

3) Soient y un entier naturel supérieur ou égal à 2, et p et q deux nombres premiers distincts :

a) Justifier que le nombre d'entiers x de la forme p^aq^b , avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = y$, est égal à $M(y) - 2$.

b) Préciser le nombre d'entiers de la forme 5^a7^b , avec a et b entiers naturels non nuls, tels que $M(x) = 12^{34}$.

Multiplications avec un même résultat.

Partie I : Etude de cas.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (aucune justification n'est demandée) :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M(x)	2	2	3	2	4	2	4	3	4

2) Montrer que « M(x) = 2 » équivaut à « x est nombre premier »

M(x) = 2, donc x s'écrit uniquement 1 x x et x x 1 ce qui équivaut au fait que 1 et x sont les seuls diviseurs de x donc, par définition, que x est premier.

3) Montrer que M(x) est impair si et seulement si x est un carré parfait.

Si x = ab, le couple (a ; b) se retrouve par symétrie (b ; a) car x = ba dans le comptage de M(x), donc par pair, sauf si a = b où ces symétriques sont identiques, donc M(x) est impair si et seulement si il existe un couple (a ; a) donc si et seulement si il existe a tel que x = axa = a^2 donc si et seulement si x est un carré parfait.

4) Justifier que M(x) est égal au nombre de diviseurs de x.

Chaque diviseur a de x peut être associé de façon unique au couple (a ; b) du produit x = a x b, et inversement, donc le nombre total M(x) de produits égaux à x est bien égal au nombre de diviseurs de x.

Partie II : Etude des premiers antécédents de M :

1) Montrer que M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)…(a_n + 1)

Les nombres premiers (p_1 , … , p_n) étant fixés, cela revient à dénombrer les puissances (b_1 ; … ; b_n) que l'on peut leur associer avec $0 \leq b_i \leq a_i$ or $0 \leq b_1 \leq a_1$ donc on a (a_1 + 1) possibilités pour b_1 , associées à (a_2 + 1) possibilités pour b_2 ; … ; associées à (a_n + 1) possibilités pour b_n d'où (a_1 + 1)(a_2 + 1)…(a_n + 1) possibilités pour les diviseurs de x.
On a vu en I) 4) que M(x) correspond au nombre de diviseurs de x donc M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)…(a_n + 1)

2) Déterminer M(2022), M(2^{2022}), M(20^{22}).

$2022 = 2^1 \times 3^1 \times 307^1$ donc d'après ce qui précède : M(2022) = 2x 2 x 2 = 8

2 étant un nombre premier, M(2^{2022}) = 2022 + 1 = 2023.

$20^{22} = (2^2 \times 5)^{22} = 2^{44} \times 5^{22}$ donc M(20^{22}) = 45 x 23 = 1 035

3) *a*) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 3 sont ceux s'écrivant sous la forme p^2 avec p entier premiers.

M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)…(a_n + 1) (avec $a_i + 1 \geq 2$) : 3 étant un nombre premier M(x) = 3 si et seulement si n = 1 et a_1 = 2 donc les x solutions sont les p^2 avec p premier.

b) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 4 sont ceux s'écrivant sous la forme p^3 ou p×q avec p et q entiers premiers distincts.

M(x) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)…(a_n + 1) (avec $a_i + 1 \geq 2$) : pour M(x) = 4 les seuls produits possibles sont n = 1 et a_1 = 3 ou bien n = 2 et $a_1 = a_2 = 1$ et donc les x possibles sont les p^3 et les p^1q^1 = pq , p et q premiers distincts.

c) Montrer que les entiers x tels que M(x) = 5 sont ceux s'écrivant sous la forme p^4 où p désigne un nombre premier.

5 étant un nombre premier, M(x) = 5 donne n = 1 et a_1 = 4 donc les solutions sont les p^4 avec p premier.

Partie III : Etude d'antécédents.

1) a) Trouver un entier naturel x tel que M(x) = 2022

Il suffit de prendre $x = p^{2021}$ avec p premier, par exemple 2^{2021}

b) Montrer que pour tout entier naturel y non nul, il existe au moins un entier naturel x tel que M(x) = y

Par analogie au a), on peut prendre par exemple $x = 2^{y-1}$ ($y \geq 2$) car alors $M(2^{y-1}) = (y-1)+1 = y$

2) On considère l'ensemble des entiers naturels $x = p_1^{a1}\ p_2^{a2} \dots p_n^{an}$ tels que M(x) = 6000

a) Ecrire 6000 sous la forme de produit de nombres premiers et déduire que $1 \leq n \leq 8$.

On a $6000 = 2^4 3^1 5^3$

Il s'agit donc de trouver $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 1$ (donc $1 + ai \geq 2$) tels que $M(x) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1) = 6000 = 2^4 3^1 5^3$

Or 6000 se décompose au maximum en le produit de 8 facteurs ≥ 2 : 6000 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 5 x 5 x 5 donc

$(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)$ comporte au plus 8 facteurs donc $n \leq 8$ (et par définition de x, $n \geq 1$)

b) Trouver le plus petit entier naturel x tel que n = 1

Si n = 1 on a $x = p_1^{a1}$ et $M(x) = a_1 + 1$ donc $M(x) = 6000 \Leftrightarrow a_1 = 5999$ d'où $x = p_1^{5999}$ donc le plus entier est $x = 2^{5999}$

c) Trouver le plus petit entier naturel x tel que n = 8

Il faut trouver le plus petit $x = p_1^{a1} \dots p_8^{a8}$ tel que M(x) = 6000.

$M(x) = (1 + a_1) \dots (1 + a_8)$ étant indépendant des valeurs des nombres premiers $p_1, \dots, p_8$, pour minimiser x il faut que ces nombres premiers soient les plus petits possibles, donc 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.

Et M(x) = 6000 donne $(1 + a_1) \dots (1 + a_8) = 6000$ or $6000 = 2^4 3^1 5^3$ donc 6000 ne peut donc s'écrire que comme le produit des 8 facteurs ≥ 2 suivants : 2 2 2 2 3 5 5 5,

On en déduit que les $(1 + a_i)$ sont les 2 2 2 2 3 5 5 5 (Rappel : $1 + ai \geq 2$ car $a_i \geq 1$)

donc les a_i sont les entiers 1 1 1 1 2 4 4 4 (avec une répartition qu'il reste à déterminer)

Enfin pour minimiser x, plus p_i est grand, plus sa puissance a_i associée doit être petite.

D'où $x = 2^4 \times 3^4 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$

x = 1 833 242 410 000 (si la calculatrice n'affiche tous les chiffres de x, on peut aussi observer que $2^4 \times 5^4 = (2 \times 5)^4 = 10^4$ = 10 000 il suffit alors de calculer le produit restant $3^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$ = 183 324 241)

d) Etude des antécédents avec n = 2 (donc $x = p^a q^b$ avec p et q entiers premiers distincts, et a et b entiers ≥ 1)

- Préciser deux nombres entiers distincts x de la forme $2^a 3^b$ (a et b entiers ≥ 1) tels que M(x) = 6000

Il suffit de déterminer deux couples (a ; b) distincts tel que M(x) = (a+1)(b+1) = 6000
Par exemple 6000 = 2 x 3000 donc a = 1 et b = 2999 d'où $x = 2^1 \times 3^{2999}$ ou aussi a = 2999 et b = 1 d'où $x = 2^{2999} \times 3^1$

- Trouver le nombre d'entier x de la forme $2^a 3^b$ avec a et b entiers naturels non nuls), tels que M(x) = 6000

M(x) = (a + 1)(b + 1), il s'agit donc de trouver le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que (a + 1)(b + 1) = 6000 or le nombre de (A ; B) d'entiers naturels ***≥ 1*** *tels que AB = 6000, est égal, par définition de M, à M(6000) = M($2^4 3^1 5^3$) = 5 x 2 x 4 = 40, or ici A = a + 1 ≥ 2 et B = b + 1 ≥ 2* donc il faut soustraire aux 40 cas (A ; B) précédents les cas où A = 1 (alors B = 6000) et où B = 1 (alors A = 6000), *on aura donc 40 – 2 = 38 solutions.*

3) Généralisation :

a) Soient y entier ≥ 2 et p et q deux nombres premiers distincts :

Justifier que le nombre d'entiers x de la forme $p^a q^b$, avec a et b entiers ≥ 1, tels que M(x) = y, est égal à M(y) – 2.

On généralise le raisonnement précédent avec y au lieu de 6000 et p et q au lieu de 2 et 3 :

M(x) = (a + 1)(b + 1), il s'agit donc de trouver le nombre de couples d'entiers naturels (a ; b) tels que (a + 1)(b + 1) = y or, par définition de M, le nombre de (A ; B) d'entiers naturels ≥ 1 tels que AB = y est égal à M(y), or ici on a : A = a + 1 ≥ 2 et B = b + 1 ≥ 2 donc il faut soustraire aux cas (A ; B) précédents les cas où A = 1 (alors B = y) et où B = 1 (alors A = y), *on a donc M(y) – 2 solutions x possibles.*

b) Préciser le nombre d'entiers de la forme $5^a 7^b$, avec a et b entiers ≥ 1, tels que M(x) = 12^{34}

Par application du a) précédent, ces entiers sont au nombre de $M(12^{34}) - 2$ *or* $12^{34} = (2^2 x 3)^{34} = 2^{68} x 3^{34}$, *donc* $M(12^{34}) - 2 = 69 x 35 - 2 = 2\ 413$ *entiers x de la forme* $5^a 7^b$ *tel que* $M(x) = 12^{34}$