Des milieux

Dans les programmes

Coordonnées d'un point, d'un milieu – Logique : et / ou – Probabilités (tirage au hasard dans un ensemble fini) – Fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 Un milieu à coordonnées entières

1.1 Quotient

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Une droite d est munie d'un repère :

   Pour un réel x, on appelle partie entière de x (notée $\lfloor x \rfloor$), l'entier le plus proche sur la gauche de x sur cette droite.
   Donnez les valeurs de $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor -5{,}12 \rfloor$, $\lfloor 6 \rfloor$.

2. Soient A et B deux noeuds. En utilisant la fonction partie entière, complèter l'algorithme suivant puis le traduire sur machine :

   Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
   Sortie : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

1.2 Reste

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.
Soient A et B deux nœuds.
On note R_2 la fonction qui à tout entier n associe le reste de la division euclidienne de n par 2.

1. Quelles sont les images de $x_A + x_B$ et de $y_A + y_B$ par la fonction R_2 lorsque le milieu J du segment $[AB]$ est un nœud ?
2. On suppose que le point J n'est pas un nœud. Laquelle ou lesquelles des phrases ci-dessous correspond exactement à cette situation ?
   (a) $R_2(x_A + x_B) = 1$ et $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (b) $R_2(x_A + x_B) = 1$ ou $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (c) $\left(R_2(x_A + x_B) = 1 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 0\right) ou \left(R_2(x_A + x_B) = 0 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 1\right)$

(d) $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=0\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=0$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$

3. Compléter l'algorithme suivant à l'aide de la fonction R_2 :

   Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
   Sortie : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

4. Écrire un programme sur votre machine traduisant cet algorithme.

2 Tirage au hasard de deux nœuds

Dans cette partie, le mot « nœud » désignera uniquement les points à coordonnées entières dont l'abscisse x vérifie $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et l'ordonnée y vérifie $-5 \leqslant y \leqslant 5$.
Traduire l'algorithme suivant sur machine :

Entrée : Un entier $n > 0$
début
    compteur $\longleftarrow$ 0
    répéter n **fois**
        Tirer un noeud A puis un noeud B au hasard (non nécessairement distinct de A).
        si *le milieu de [AB] est un noeud* **alors**
            compteur $\longleftarrow$ compteur +1
fin
Sortie : compteur/n

Donner une estimation de la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds.

3 Dénombrement

1. Écrire un algorithme qui dénombre le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds puis un algorithme dénombrant le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds et pour milieu un noeud.
2. Faire ce même décompte « à la main ».
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds ?

4 Tirage de cinq noeuds au hasard

A l'aide d'un algorithme, on a simulé des tirages de cinq noeuds au hasard puis estimé la probabilité que l'un au moins des dix segments définis par ces noeuds ait un noeud pour milieu. Par observation des résultats, on conjecture une probabilité de 1.
Comment expliquer cette observation ?

Éléments de réponses – XCAS

1 Un milieu à coordonnées entières

1.1 Quotient

Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
début
  si $\left\lfloor \frac{x_A+x_B}{2} \right\rfloor == \frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $\left\lfloor \frac{y_A+y_B}{2} \right\rfloor == \frac{y_A+y_B}{2}$ **alors**
    retourner True
  sinon
    retourner False
fin

Xcas

```
saisir(xA):;
saisir(yA):;
saisir(xB):;
saisir(yB):;
si floor((xA+xB)/2)==(xA+xB)/2 et floor((yA+yB)/2)==(yA+yB)/2 alors
afficher("vrai");
sinon afficher("faux");
fsi:;
```

Sous forme d'une fonction :

Xcas

```
milieu_is_noeud(xA,yA,xB,yB):={
si floor((xA+xB)/2)==(xA+xB)/2 alors
si floor((yA+yB)/2)==(yA+yB)/2 alors
return true; sinon return false;
fsi;fsi;
}:;
```

1.2 Reste

1. Lorsque le milieu J du segment $[AB]$ est un nœud, on a :

$$R_2(x_A+x_B)=0 \text{ et } R_2(y_A+y_B)=0$$

2. (a)
   (b) $R_2(x_A+x_B)=1$ ou $R_2(y_A+y_B)=1$
   (c)

(d) $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=0\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=0$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$
ou $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$

3.

Entrée : Deux points A et B définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
début
  si $R_2(x_A+x_B)==0$ *et* $R_2(y_A+y_B)==0$ **alors**
    retourner TRUE
  sinon
    retourner FALSE
fin
Sortie : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

4. Programme machine :

Xcas

```
saisir(xA):;
saisir(yA):;
saisir(xB):;
saisir(yB):;
si irem(xA+xB,2)==0 et irem(yA+yB,2)==0
alors afficher("vrai");
sinon afficher("faux");
fsi:;
```

Sous forme d'une fonction :

Xcas

```
milieu_est_noeud(xA,yA,xB,yB):={
si irem(xA+xB,2)==0 et irem(yA+yB,2)==0
alors return true;
sinon return false;
fsi;
}:;
```

2 Tirage au hasard de deux noeuds

Xcas

```
tirerdeuxnoeuds(n,xmin,xmax,ymin,ymax):={
local k,cpt,xA,yA,xB,yB;
cpt:=0;
pour k de 1 jusque n faire
xA:=floor(rand(xmin,xmax+1));
yA:=floor(rand(ymin,ymax+1));
xB:=floor(rand(xmin,xmax+1));
yB:=floor(rand(ymin,ymax+1));
si milieu_est_noeud(xA,yA,xB,yB) alors
cpt:=cpt+1;
fsi;
fpour;
return evalf(cpt/n);
}:;
```

ou encore

Xcas

```
saisir(n):;
compteur:=0:;
pour k de 1 jusque n faire
xA:=floor(rand(-4,5));
yA:=floor(rand(-5,6));
xB:=floor(rand(-4,5));
yB:=floor(rand(-5,6));
si irem(xA+xB,2)==0 et irem(yA+yB,2)==0
alors
compteur:=compteur+1;
fsi;
fpour:;
afficher(evalf(compteur/n)):;
```

3 Dénombrement

Le nombre total de segments (en comptant ceux réduits à un point) : $99 \times 99 = 9801$.

Xcas

```
comptemilieunoeud(xmin,xmax,ymin,ymax):={
local xA,yA,xB,yB,cpt;
cpt:=0;
pour xA de xmin jusque xmax faire
pour yA de ymin jusque ymax faire
pour xB de xmin jusque xmax faire
si irem(xA+xB,2)==0 alors
pour yB de ymin jusque ymax faire
si irem(yA+yB,2)==0 alors
cpt:=cpt+1;
fsi;
fpour;
fi;
fpour;
fpour;
fpour;
return cpt;
}:;
```

ou

Xcas

```
cpt:=0:;
pour xA de -4 jusque 4 faire
pour yA de -5 jusque 5 faire
pour xB de -4 jusque 4 faire
si irem(xA+xB,2)==0 alors
pour yB de -5 jusque 5 faire
si irem(yA+yB,2)==0 alors
cpt:=cpt+1;
fsi;
fpour;
fsi;
fpour;
fpour;
fpour:;
afficher(cpt):;
```

réponse : 2 501.
Dénombrement "à la main" :
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, pair) : 25×25,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, impair) : 30×30,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, pair) : 20×20,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, impair) : 24×24.
Le total est de 2 501.
La probabilité demandée est donc de $\frac{2\,501}{9\,801} \approx 0{,}255$.

4 Cinq noeuds au hasard

Les coordonnées d'un point entier sont de l'un des quatre types suivants : (pair, pair), (pair, impair), (impair, pair), (impair,impair). Sur cinq noeuds, deux ont le même type et leur milieu est nécessairement un noeud. D'où une probabilité de 1.