# Des milieux

**Dans les programmes**

Coordonnées d'un point, d'un milieu – Logique : et / ou – Probabilités (tirage au hasard dans un ensemble fini) – Fonction

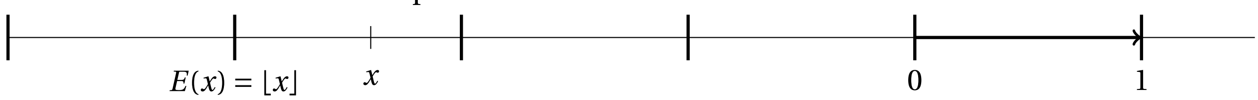
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

## 1 Un milieu à coordonnées entières

### 1.1 Quotient

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Une droite $d$ est munie d'un repère :




   Pour un réel $x$, on appelle partie entière de $x$ (notée $\lfloor x \rfloor$ ), l'entier le plus proche sur la gauche de $x$ sur cette droite.
   Donnez les valeurs de $\lfloor \pi \rfloor$, $\lfloor -5{,}12 \rfloor$, $\lfloor 6 \rfloor$.

2. Soient $A$ et $B$ deux noeuds. En utilisant la fonction partie entière, complèter l'algorithme suivant puis le traduire sur machine :

   **Entrée** : Deux points $A$ et $B$ définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
   **Sortie** : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

### 1.2 Reste

Dans cette partie, on appellera nœud tout point dont les deux coordonnées sont entières dans le repère $\mathscr{R}$.
Soient $A$ et $B$ deux nœuds.
On note $R_2$ la fonction qui à tout entier $n$ associe le reste de la division euclidienne de $n$ par 2.

1. Quelles sont les images de $x_A + x_B$ et de $y_A + y_B$ par la fonction $R_2$ lorsque le milieu $J$ du segment $[AB]$ est un nœud ?

2. On suppose que le point $J$ n'est pas un nœud. Laquelle ou lesquelles des phrases ci-dessous correspond exactement à cette situation ?
   (a) $R_2(x_A + x_B) = 1$ et $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (b) $R_2(x_A + x_B) = 1$ ou $R_2(y_A + y_B) = 1$
   (c) $\left(R_2(x_A + x_B) = 1 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 0\right)$ *ou* $\left(R_2(x_A + x_B) = 0 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 1\right)$

(d) $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=0\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=0$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$
ou $\big(R_2(x_A+x_B)=1$ et $R_2(y_A+y_B)=1\big)$

3. Compléter l'algorithme suivant à l'aide de la fonction $R_2$ :

**Entrée** : Deux points $A$ et $B$ définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
**Sortie** : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

4. Écrire un programme sur votre machine traduisant cet algorithme.

## 2 Tirage au hasard de deux nœuds

Dans cette partie, le mot « nœud » désignera uniquement les points à coordonnées entières dont l'abscisse $x$ vérifie $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et l'ordonnée $y$ vérifie $-5 \leqslant y \leqslant 5$.
Traduire l'algorithme suivant sur machine :

```
Entrée : Un entier n > 0
début
    compteur ⟵ 0
    répéter n fois
        Tirer un noeud A puis un noeud B au hasard (non nécessairement distinct de A).
        si le milieu de [AB] est un noeud alors
            compteur ⟵ compteur +1
fin
Sortie : compteur/n
```

Donner une estimation de la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds.

## 3 Dénombrement

1. Écrire un algorithme qui dénombre le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds puis un algorithme dénombrant le nombre de segments ayant pour extrémités (éventuellement confondues) deux noeuds et pour milieu un noeud.
2. Faire ce même décompte « à la main ».
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un segment ayant pour milieu un noeud lorsqu'on tire une extrémité au hasard puis l'autre parmi les noeuds ?

## 4 Tirage de cinq noeuds au hasard

A l'aide d'un algorithme, on a simulé des tirages de cinq noeuds au hasard puis estimé la probabilité que l'un au moins des dix segments définis par ces noeuds ait un noeud pour milieu. Par observation des résultats, on conjecture une probabilité de 1.
Comment expliquer cette observation ?

# Éléments de réponses – ALGOBOX

## 1 Un milieu à coordonnées entières

### 1.1 Quotient

**Entrée** : Deux points $A$ et $B$ définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
**début**
  **si** $\lfloor \frac{x_A+x_B}{2} \rfloor == \frac{x_A+x_B}{2}$ *et* $\lfloor \frac{y_A+y_B}{2} \rfloor == \frac{y_A+y_B}{2}$ **alors**
    retourner True
  **sinon**
    retourner False
**fin**

```
VARIABLES
  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  xB EST_DU_TYPE NOMBRE
  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  yB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE xA
  LIRE yA
  LIRE xB
  LIRE yB
  SI (floor((xA+xB)/2)==(xA+xB)/2 et floor((yA+yB)/2)==(yA+yB)/2) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "vrai"
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "faux"
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

### 1.2 Reste

1. Lorsque le milieu $J$ du segment $[AB]$ est un nœud, on a :

$$R_2(x_A + x_B) = 0 \text{ et } R_2(y_A + y_B) = 0$$

2. (a)
   (b) $R_2(x_A + x_B) = 1$ ou $R_2(y_A + y_B) = 1$

(c)

(d) $\big(R_2(x_A+x_B)=1 \text{ et } R_2(y_A+y_B)=0\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=0 \text{ et } R_2(y_A+y_B)=1\big)$ ou $\big(R_2(x_A+x_B)=1 \text{ et } R_2(y_A+y_B)=1\big)$

3.

**Entrée** : Deux points $A$ et $B$ définis par leurs coordonnées dans le repère $\mathscr{R}$
**début**
  **si** $R_2(x_A+x_B) == 0$ *et* $R_2(y_A+y_B) == 0$ **alors**
    retourner TRUE
  **sinon**
    retourner FALSE
**fin**
**Sortie** : True si le milieu de [AB] est un noeud, False sinon

4. Programme machine :

```
VARIABLES
  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  xB EST_DU_TYPE NOMBRE
  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  yB EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE xA
  LIRE yA
  LIRE xB
  LIRE yB
  SI ((xA+xB)%2==0  et  (yA+yB)%2==0) ALORS
    DEBUT_SI
    AFFICHER "vrai"
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "faux"
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

# 2 Tirage au hasard de deux noeuds

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  xB EST_DU_TYPE NOMBRE
  yB EST_DU_TYPE NOMBRE
```

```
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  rapport EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  compteur PREND_LA_VALEUR 0
  POUR k ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    xA PREND_LA_VALEUR floor(9*random()-4)
    yA PREND_LA_VALEUR floor(11*random()-5)
    xB PREND_LA_VALEUR floor(9*random()-4)
    yB PREND_LA_VALEUR floor(11*random()-5)
    SI ((xA+xB)%2==0 et (yA+yB)%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  rapport PREND_LA_VALEUR compteur/n
  AFFICHER rapport
FIN_ALGORITHME
```

# 3 Dénombrement

Le nombre total de segments (en comptant ceux réduits à un point) : $99 \times 99 = 9801$.

```
VARIABLES
  xA EST_DU_TYPE NOMBRE
  yA EST_DU_TYPE NOMBRE
  xB EST_DU_TYPE NOMBRE
  yB EST_DU_TYPE NOMBRE
  compteur EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  compteur PREND_LA_VALEUR 0
  POUR xA ALLANT_DE -4 A 4
    DEBUT_POUR
    POUR yA ALLANT_DE -5 A 5
      DEBUT_POUR
      POUR xB ALLANT_DE -4 A 4
        DEBUT_POUR
        SI ((xA+xB)%2==0) ALORS
          DEBUT_SI
          POUR yB ALLANT_DE -5 A 5
            DEBUT_POUR
            SI ((yA+yB)%2==0) ALORS
```

```
                DEBUT_SI
                compteur PREND_LA_VALEUR compteur+1
                FIN_SI
              FIN_POUR
            FIN_SI
          FIN_POUR
        FIN_POUR
      FIN_POUR
    AFFICHER compteur
  FIN_ALGORITHME
```

réponse : 2 501.
Dénombrement "à la main" :

– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, pair) : $25 \times 25$,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (pair, impair) : $30 \times 30$,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, pair) : $20 \times 20$,
– on compte les segments dont les deux extrémités sont du type (impair, impair) : $24 \times 24$.

Le total est de 2 501.
La probabilité demandée est donc de $\frac{2\,501}{9\,801} \approx 0{,}255$.

## 4 Cinq noeuds au hasard

Les coordonnées d'un point entier sont de l'un des quatre types suivants : (pair, pair), (pair, impair), (impair, pair), (impair,impair). Sur cinq noeuds, deux ont le même type et leur milieu est nécessairement un noeud. D'où une probabilité de 1.