Démonstration de la question 9º)

Supposons $u_{3n+1} = 3u_n + 1$. Montrons que $u_{3(n+1)+1} = 3u_{n+1} + 1$, c'est-à-dire $u_{3n+4} = 3u_{n+1} + 1$.

— Si $0 \leqslant u_n \leqslant n$, alors le voyageur ne peut pas donner au $n+1$-ième mendiant, donc $u_{n+1} = u_n + n + 1$. D'autre part, $1 \leqslant u_{3n+1} = 3u_n + 1 \leqslant 3n + 1$ donc par la question 4ºa)

$$u_{3n+3} = u_{3n+1} - 1 = 3u_n \leqslant 3n < 3n + 4$$

Le voyageur ne peut pas non plus payer le $3n + 4$-ième mendiant et

$$u_{3n+4} = 3u_n + 3n + 4 = 3(u_n + n + 1) + 1 = 3u_{n+1} + 1$$

ce qu'il fallait démontrer.

— Si $u_n \geqslant n+1$, le voyageur a assez d'argent pour payer le $n+1$-ième mendiant. Ainsi $u_{n+1} = u_n - n - 1$. De plus, $u_{3n+1} = 3u_n + 1 \ \geqslant 3(n + 1) + 1 = 3n + 4 > 3n + 1$, et par la question 4ºb)

$$u_{3n+3} = u_{3n+1} + 1 = 3u_n + 2$$

Mais alors $u_{3n+3} \geqslant 3(n + 1) + 2 \geqslant 3n + 5$: le voyageur peut payer le $3n + 4$-ième mendiant, et

$$u_{3n+4} = 3u_n + 2 - (3n + 4) = 3u_n - 3n - 2 = 3(u_n - n - 1) + 1 = 3u_n + 1$$

La propriété est donc héréditaire pour tout entier n. Reste à vérifier que la propriété est vraie pour $n = 0$, ce qui est trivial puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Remarque

Étant donné que l'on n'a pas utilisé la question 5ºa), on peut démontrer cette dernière en utilisant la question 9º) aisément :

Si $u_n = 0$, $u_{3n+1} = 3u_n + 1 = 1$. Mais alors le $3n + 2$-ième mendiant donne la somme d'argent et $u_{3n+2} = 3n + 3$. Le voyageur peut ainsi exactement payer au $3n + 3$-ième mendiant, ce qui donne $u_{3n+3} = 0$.

Analyse précise de la structure de la suite

Cette analyse est inspirée par l'arbre fait par Bodo.

On rappelle qu'on a $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$, $u_5 = 9$, $u_6 = 3$, $u_7 = 10$, $u_8 = 2$, $u_9 = 11$, $u_{10} = 1$, $u_{11} = 12$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 13$, $u_{14} = 27$ et $u_{15} = 12$.

En étudiant les termes d'indice pair non nul d'un côté et les termes d'indice impair de l'autre, on obtient deux sous-suites :

— $u_1 = 1$, $u_3 = 0$, $u_5 = 9$, $u_7 = 10$, $u_9 = 11$, $u_{11} = 12$, $u_{13} = 13$, $u_{15} = 12$, $u_{17} = 11$, $u_{19} = 10$...

— $u_2 = 3$, $u_4 = 4$, $u_6 = 3$, $u_8 = 2$, $u_{10} = 1$, $u_{12} = 0$, $u_{14} = 27$, $u_{16} = 28$, $u_{18} = 29$, $u_{20} = 30$...

On pose $u_{-1} = 0$. Soit $n \leqslant 1$, avec $u_{n-2} = 0$. D'après la question 5ºa) $u_{3(n-2)+3} = 0$ soit $u_{3n-3} = 0$, mais aussi $u_{3(3n-3)+3} = 0$ soit $u_{9n-6} = 0$. Puisque $9n - 6$ a la même parité que n, on peut définir le *groupe* de termes $(u_n, u_{n+2}, \dots, u_{9n-6})$ qui se termine par un 0, et contient $\dfrac{9n - 6 - n}{2} + 1 = 4n - 2$ termes.

Le terme u_{9n-4} suit ce groupe, et commence un nouveau groupe de même parité. On sait aussi que $u_{3n-3} = 0$ donc u_{3n-1} commence lui aussi un groupe, de parité différente. Le groupe de premier terme u_{3n-1} possède $4(3n-1)-2 = 3(4n-2)$ termes, soit trois fois plus que le groupe débutant par u_n.

Pour $n = 1$ on obtient le groupe $(u_1 = 1,\ u_3 = 0)$. Un autre groupe commence à $n = 3\times 1 - 1 = 2$: $(u_2 = 3,\ u_4 = 4,\ u_6 = 3,\ u_8 = 2,\ u_{10} = 1,\ u_{12} = 0)$. Un autre commence à $n = 3\times 2 - 1 = 5$ et il suit directement le dernier terme du groupe $(u_1 = 1,\ u_3 = 0)$.

On peut ainsi découper la suite en groupes disjoints :

— $u_0 = 0$
— $u_1 = 1$ et $u_3 = 0$
— $u_2 = 3$, $u_4 = 4$, $u_6 = 3$, $u_8 = 2$, $u_{10} = 1$ et $u_{12} = 0$
— $u_5 = 9$, $u_7 = 10$, $u_9 = 11$, $u_{11} = 12$, $u_{13} = 13$, $u_{15} = 12$, $u_{17} = 11$, $u_{19} = 10$, $u_{21} = 9$, $u_{23} = 8$, $u_{25} = 7$, $u_{27} = 6$, $u_{29} = 5$, $u_{31} = 4$, $u_{33} = 3$, $u_{35} = 2$, $u_{37} = 1$ et $u_{39} = 0$
— $u_{14} = 27$, $u_{16} = 28$, $u_{18} = 29$, $u_{20} = 30$, …, $u_{38} = 39$, $u_{40} = 40$, $u_{42} = 39$, $u_{44} = 38$, …, $u_{110} = 5$, $u_{112} = 4$, $u_{114} = 3$, $u_{116} = 2$, $u_{118} = 1$ et $u_{120} = 0$
— $u_{41} = 81$, $u_{43} = 82$, $u_{45} = 83$, $u_{47} = 84$, …, $u_{115} = 118$, $u_{117} = 119$, $u_{119} = 120$, $u_{121} = 121$, $u_{123} = 120$, $u_{125} = 119$, $u_{127} = 118$, $u_{129} = 117$, …
— …

Étudions le groupe de premier terme u_n avec $n \geqslant 1$. Puisque $u_{n-2} = 0$, $u_{n-1} = n-1$ car le mendiant est alors généreux, et $u_n = 2n-1$ car le voyageur n'a toujours pas de quoi payer le n-ième mendiant.

Soit $\forall m, v_m = u_m - m$. On a $v_n = n-1$. D'après la question 3º), $\forall m, -m \leqslant v_m \leqslant m$, et d'après la question 4º) :

— si $v_m \geqslant 1$ alors $v_{m+2} = u_{m+2} - m - 2 = u_m + 1 - m - 2 = v_m - 1$;
— si $v_m \leqslant 0$ alors $v_{m+2} = u_{m+2} - m - 2 = u_m - 1 - m - 2 = v_m - 3$.

Dans tous les cas, on obtient une suite de valeurs entières strictement décroissantes $v_n > v_{n+2} > v_{n+4} > \cdots > v_{n+2k}$. Plus précisément, $v_{n+2} = v_n - 1 = n - 2$, …, $v_{n+2k} = n - 1 - k$, jusqu'à $v_{n+2(n-1)} = 0$ soit $v_{3n-2} = 0$. Cela correspond à des augmentations $u_{n+2} = u_n + 1$, $u_{n+4} = u_n + 2$, jusqu'à atteindre $u_{3n-2} = 3n - 2$.

Par la suite les termes v_{n+2k} sont tous négatifs ou nuls, c'est-à-dire $u_{n+2k} \leqslant n + 2k$ donc les termes du groupe diminuent de un en un et il faut encore $3n-2$ étapes pour atteindre $u_{3n-2+2(3n-2)} = 0$, ou encore $u_{9n-6} = 0$.

Les seuls termes nuls dans la suite sont donc bien donnés par la question 5ºa) : dans chaque groupe tous les termes sont non nuls hormis le dernier. De plus les valeurs des termes sont toutes consécutives, croissantes de u_n à $u_{3n-2} = 3n - 2$ puis décroissants de u_{3n-2} à $u_{9n-6} = 0$.

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$, $u_5 = 9$, $u_6 = 3$, $u_7 = 10$, $u_8 = 2$, $u_9 = 11$, $u_{10} = 1$, $u_{11} = 12$, $u_{12} = 0$, $u_{13} = 13$, $u_{14} = 27$, $u_{15} = 12$, $u_{16} = 28$, $u_{17} = 11$, $u_{18} = 29$, $u_{19} = 10$, $u_{20} = 30$, $u_{21} = 9$, $u_{22} = 31$, $u_{23} = 8$, $u_{24} = 32$, $u_{25} = 7$, $u_{26} = 33$, $u_{27} = 6$, $u_{28} = 34$, $u_{29} = 5$, $u_{30} = 35$, $u_{31} = 4$, $u_{32} = 36$, $u_{33} = 3$, $u_{34} = 37$, $u_{35} = 2$, $u_{36} = 38$, $u_{37} = 1$, $u_{38} = 39$, $u_{39} = 0$, $u_{40} = 40$, $u_{41} = 81$, $u_{42} = 39$, $u_{43} = 82$, $u_{44} = 38$, $u_{45} = 83$, $u_{46} = 37$, $u_{47} = 84$, $u_{48} = 36$, $u_{49} = 85$, $u_{50} = 35$, $u_{51} = 86$, $u_{52} = 34$, $u_{53} = 87$, $u_{54} = 33$, $u_{55} = 88$, $u_{56} = 32$, $u_{57} = 89$, $u_{58} = 31$, $u_{59} = 90$, $u_{60} = 30$, $u_{61} = 91$, $u_{62} = 29$, $u_{63} = 92$, $u_{64} = 28$, $u_{65} = 93$, $u_{66} = 27$, $u_{67} = 94$, $u_{68} = 26$, $u_{69} = 95$, $u_{70} = 25$, $u_{71} = 96$, $u_{72} = 24$, $u_{73} = 97$, $u_{74} = 23$, $u_{75} = 98$, $u_{76} = 22$, $u_{77} = 99$, $u_{78} = 21$, $u_{79} = 100$, $u_{80} = 20$, $u_{81} = 101$, $u_{82} = 19$, $u_{83} = 102$, $u_{84} = 18$, $u_{85} = 103$, $u_{86} = 17$, $u_{87} = 104$, $u_{88} = 16$, $u_{89} = 105$, $u_{90} = 15$, $u_{91} = 106$, $u_{92} = 14$, $u_{93} = 107$, $u_{94} = 13$, $u_{95} = 108$, $u_{96} = 12$, $u_{97} = 109$, $u_{98} = 11$, $u_{99} = 110$, $u_{100} = 10$, $u_{101} = 111$, $u_{102} = 9$, $u_{103} = 112$, $u_{104} = 8$, $u_{105} = 113$, $u_{106} = 7$, $u_{107} = 114$, $u_{108} = 6$, $u_{109} = 115$, $u_{110} = 5$, $u_{111} = 116$, $u_{112} = 4$, $u_{113} = 117$, $u_{114} = 3$, $u_{115} = 118$, $u_{116} = 2$, $u_{117} = 119$, $u_{118} = 1$, $u_{119} = 120$, $u_{120} = 0$, $u_{121} = 121$, $u_{122} = 243$, $u_{123} = 120$, $u_{124} = 244$, $u_{125} = 119$, $u_{126} = 245$, $u_{127} = 118$, $u_{128} = 246$, $u_{129} = 117$, $u_{130} = 247$, $u_{131} = 116$, $u_{132} = 248$, $u_{133} = 115$, $u_{134} = 249$, $u_{135} = 114$, $u_{136} = 250$, $u_{137} = 113$, $u_{138} = 251$, $u_{139} = 112$, $u_{140} = 252$,

$u_{141} = 111$, $u_{142} = 253$, $u_{143} = 110$, $u_{144} = 254$, $u_{145} = 109$, $u_{146} = 255$, $u_{147} = 108$, $u_{148} = 256$, $u_{149} = 107$, $u_{150} = 257$, $u_{151} = 106$, $u_{152} = 258$, $u_{153} = 105$, $u_{154} = 259$, $u_{155} = 104$, $u_{156} = 260$, $u_{157} = 103$, $u_{158} = 261$, $u_{159} = 102$, $u_{160} = 262$, $u_{161} = 101$, $u_{162} = 263$, $u_{163} = 100$, $u_{164} = 264$, $u_{165} = 99$, $u_{166} = 265$, $u_{167} = 98$, $u_{168} = 266$, $u_{169} = 97$, $u_{170} = 267$, $u_{171} = 96$, $u_{172} = 268$, $u_{173} = 95$, $u_{174} = 269$, $u_{175} = 94$, $u_{176} = 270$, $u_{177} = 93$, $u_{178} = 271$, $u_{179} = 92$, $u_{180} = 272$, $u_{181} = 91$, $u_{182} = 273$, $u_{183} = 90$, $u_{184} = 274$, $u_{185} = 89$, $u_{186} = 275$, $u_{187} = 88$, $u_{188} = 276$, $u_{189} = 87$, $u_{190} = 277$, $u_{191} = 86$, $u_{192} = 278$, $u_{193} = 85$, $u_{194} = 279$, $u_{195} = 84$, $u_{196} = 280$, $u_{197} = 83$, $u_{198} = 281$, $u_{199} = 82$, $u_{200} = 282$...

$*\quad*$

$*$