Un crible

Dans les programmes

Équation de droite, fonction carré, notion de courbe représentative, intersection de deux droites, diviseur d'un entier, nombres premiers.

Soit f la fonction carré et $\mathscr{P}$ la courbe représentative de f dans un repère.

1. Écrire un programme avec ALGOBOX qui représente les segments dont une extrémité est le point d'abscisse -2 de $\mathscr{P}$ et l'autre extrémité le point d'abscisse i de $\mathscr{P}$, où i parcourt l'ensemble des entiers entre 1 et 10.
2. Quellle conjecture peut-on émettre quant à l'intersection d'un segment d'extrémités $A(-2;4)$ et $B_i\left(i;i^2\right)$ avec l'axe des ordonnées ? Démontrer cette conjecture.
3. Modifier le programme précédent en changeant le point A d'abscisse -2 de la courbe en le point A d'abscisse -3 (les autres extrémités resteront inchangées).
   Quelle conjecture faîtes vous dans ce cas ? Démontrer.
4. Modifier le programme afin qu'il demande en premier lieu un entier naturel non nul k puis trace les segments $[AB_i]$ où $A\left(-k;k^2\right)$. La conjecture se généralise-t-elle ? Démontrer.
5. On trace les segments $[A_jB_i]$ (où i et j sont des entiers naturels et A_j d'abscisse $-j$ et B_i d'abscisse i sont des points de la parabole représentant la fonction carré) pour j prenant les valeurs entières entre 2 et 10 et i prenant les valeurs entières entre 2 et 50. Quelle particularité ont les ordonnées entières des points de l'axe des ordonnées qui n'appartiennent à aucun des segments ainsi tracés ?

Éléments de réponses – XCAS

1. **Les multiples de 2**

   L'algorithme sous xcas :

   Xcas

   ```
   segments:=[]:;
   pour p de 1 jusque 10 faire
   segments:=append(segments,segment(point(-2,4),point(p,p^2)));
   fpour:;
   affichage(segments)
   ```

   Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i).

   Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i}-y_A}{x_{B_i}-x_A} = \frac{i^2-4}{i+2} = i-2$.

   Et l'ordonnée à l'origine :

   $p = y_A - m \times x_A = 4-(i-2)\times(-2) = 2i$.

   Les ordonnées à l'origine sont les multiples de 2.

2. **Les multiples de 3.**

   L'algorithme sous XCAS :

   Xcas

   ```
   segments:=[]:;
   pour p de 1 jusque 10 faire
   segments:=append(segments,segment(point(-3,9),point(p,p^2)));
   fpour:;
   affichage(segments)
   ```

   Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i).

   Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i}-y_A}{x_{B_i}-x_A} = \frac{i^2-9}{i+3} = i-3$.

   Et l'ordonnée à l'origine :

   $p = y_A - m \times x_A = 9-(i-3)\times(-3) = 3i$.

   Les ordonnées à l'origine sont les multiples de 3.

3. Algorithme :

   Xcas

   ```
   saisir(k):;
   segments:=[]:;
   pour p de 1 jusque 10 faire
   segments:=append(segments,segment(point(-k,k^2),point(p,p^2)));
   fpour:;
   affichage(segments)
   ```

Il s'agit de chercher l'ordonnée à l'origine de la droite (AB_i) où $A\left(-k; k^2\right)$, k étant un entier naturel $\neq 0$.
Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_{B_i} - y_A}{x_{B_i} - x_A} = \frac{i^2 - k^2}{i + k} = i - k$.
Et l'ordonnée à l'origine :
$p = y_A - m \times x_A = k^2 + k(i - k) = ki$.
Les ordonnées à l'origine sont les multiples de k.

4. **Le crible de Matiassevitch**
   L'algorithme sous xcas :

Xcas

```
segments:=[]:;
pour j de 2 jusque 10 faire
pour p de 2 jusque 50 faire
segments:=append(segments,segment(point(-j,j^2),point(p,p^2)));
fpour;
fpour:;
affichage(segments)
```