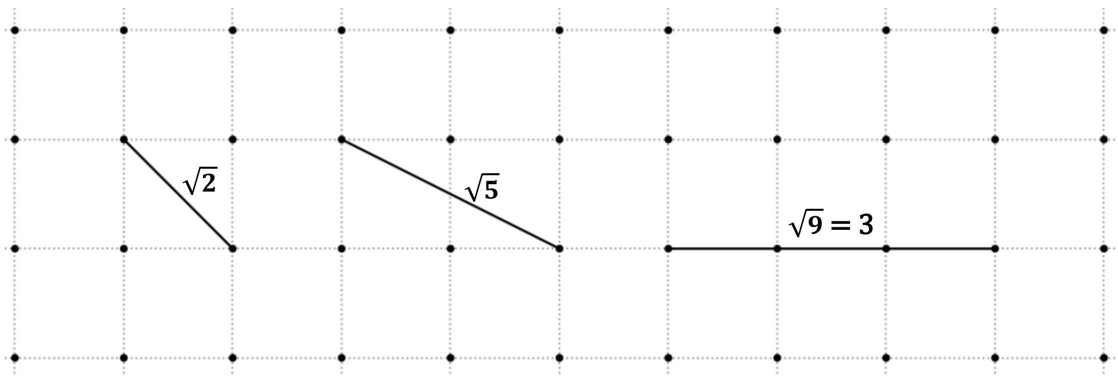
LES LONGUEURS TRAÇABLES DANS UNE GRILLE UNITÉ

Une grille unité est une grille formée de carrés de longueur 1, et les sommets de ces carrés sont alors appelés nœuds de la grille. Le but de ce problème est d'étudier les longueurs que l'on peut obtenir en reliant en ligne droite deux nœuds d'une grille unité et de savoir s'il existe plusieurs possibilités pour obtenir ces longueurs.

Partie 1 : Premiers exemples.



1) Justifier les longueurs $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ indiquées dans la grille unité ci-dessus.

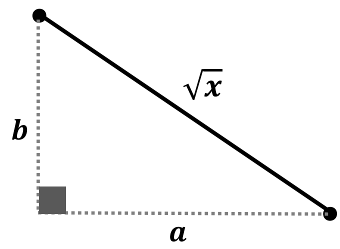
Définition générale :

Soit x un entier naturel.

On dira que $\sqrt{x}$ **est traçable** dans une grille unité s'il existe deux entiers naturels a et b tels que : $\boldsymbol{x = a^2 + b^2}$

Dans ces conditions on écrira que $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Ainsi avec les exemples précédents on a : $\sqrt{2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{9} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$



2) La longueur $\sqrt{23}$ est-elle traçable ? Justifier.

3) Montrer que les longueurs $\sqrt{17}$; $\sqrt{32}$ et $\sqrt{45}$ sont traçables.

4) Soit x un entier naturel : montrer que si $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ alors $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$.

Partie 2 : Longueurs deux fois traçables.

1) Montrer que $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ et que $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Soit x un entier naturel. On dira que $\sqrt{x}$ est deux fois traçable s'il existe deux couples distincts $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ d'entiers naturels, avec $a_1 \geq b_1$ et $a_2 \geq b_2$, tels que $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

2) Montrer que $\sqrt{50}$ et $\sqrt{65}$ sont deux fois traçables.

3) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on note : $x_n = 5n^2 + 5$.

a) Montrer que $\sqrt{x_n} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2 \end{bmatrix}$ puis que $\sqrt{x_n} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{bmatrix}$.

b) Déduire que $\sqrt{x_n}$ est deux fois traçable.

c) Réciproquement, si $\sqrt{x}$ est deux fois traçable, x est-il nécessairement de la forme $5n^2 + 5$ avec n entier naturel supérieur ou égal à 2 ? Justifier.

Partie 3 : Forme générale des longueurs deux fois traçables.

Soit x un entier naturel.

On admettra le résultat suivant :

$\sqrt{x}$ est deux fois traçable si et seulement si :

x = (a² + b²)(c² + d²) avec a, b, c, d entiers naturels non nuls tels que a > b , c > d

Et dans ces conditions : $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} ad + bc \\ ac - bd \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |ad - bc| \\ ac + bd \end{bmatrix}$

(On rappelle que $|z|$ désigne la valeur absolue de z : $|z| = z$ si $z \geq 0$ et $|z| = -z$ si $z \leq 0$)

1) Justifier que si x est un nombre premier, $\sqrt{x}$ n'est pas deux fois traçable.

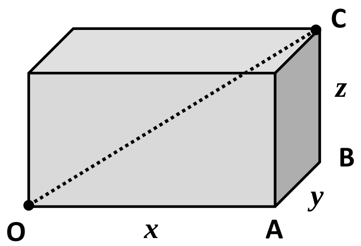
2) Trouver les entiers x inférieurs ou égaux à 150 tels que $\sqrt{x}$ soit deux fois traçable et préciser pour chacun d'eux les couples $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ correspondants.

3) Sachant que 2023 = 7 x 17 x 17 : Justifier que $\sqrt{2023}$ n'est pas traçable.

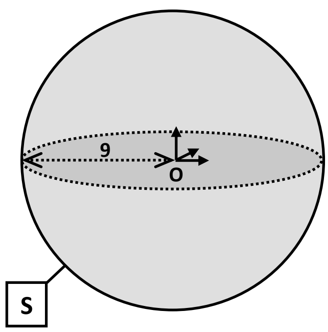
4) En remarquant que 325 = 5 x 65, montrer que $\sqrt{325}$ est trois fois traçable et préciser les trois couples $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ avec $a \geq b$ correspondants.

5) En remarquant que 1625 = 25 x 65, montrer que $\sqrt{1625}$ est quatre fois traçable et préciser les quatre couples $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ avec $a \geq b$ correspondants.

Partie 4 : Étude d'une configuration dans l'espace.



1) Dans le dessin ci-contre O, A, B, C sont des sommets d'un parallélépipède rectangle de longueurs x, y, z : Montrer que OC² = $x^2 + y^2 + z^2$.



2) *a*) Soient a , b et c des entiers naturels tels que $a \leq b \leq c$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 81$: Montrer que $6 \leq c \leq 9$.

b) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère la <u>sphère</u> S de centre O et de rayon 9 (voir schéma ci-contre).
Montrer qu'il y a exactement 102 points de coordonnées entières (entiers naturels ou relatifs) situés sur la sphère S.

PROPOSITION DE SOLUTION

Partie 1 : Premiers exemples.

1) Par application du théorème de Pythagore.

2) On a $23 = 0^2 + 23 = 1^2 + 22 = 2^2 + 19 = 3^2 + 14 = 4^2 + 7$ or dans ces sommes, aucun des entiers complétant les carrés n'est lui-même un carré d'entier naturel, donc $\sqrt{23}$ n'est pas traçable.

3) $17 = 1^2 + 4^2$; $32 = 4^2 + 4^2$; $45 = 3^2 + 6^2$ donc $\sqrt{17} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\sqrt{32} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{45} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ sont bien traçables.

4) Soit $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, on a $x = a^2 + b^2$ donc $x = b^2 + a^2$ d'où $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$ (ou bien par symétrie des triangles $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$)

Partie 2 : Longueurs deux fois traçables.

1) On a $9^2 + 2^2 = 81 + 4 = 85$ et $7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85$ donc $\sqrt{85} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2) $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$ donc $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$; $50 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2$ donc $\sqrt{50} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$;

$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$ donc $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$.

3) *a*) $(2n + 1)^2 + (n - 2)^2 = (4n^2 + 4n + 1) + (n^2 - 4n + 4) = 5n^2 + 5 = x_n$

où $(n - 2)$ est un entier naturel car $n \geq 3$ donc $\sqrt{x_n} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2 \end{bmatrix}$

$(2n - 1)^2 + (n + 2)^2 = (4n^2 - 4n + 1) + (n^2 + 4n + 4) = 5n^2 + 5 = x_n$

où $(2n - 1)$ est un entier naturel car $n \geq 3$ donc $\sqrt{x_n} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{bmatrix}$

b) On a montré que $\sqrt{x_n} = \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{bmatrix}$

Avec $(2n + 1) \geq (n - 2)$ car $n \geq -3$ car $n \geq 3$

et $(2n - 1) \geq (n + 2)$ car $n \geq 3$

D'autre part $\begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{bmatrix}$ car $(2n + 1) \neq (2n - 1)$ (ou aussi $(n - 2) \neq (n + 2)$)

Donc $\sqrt{x_n}$ est bien deux fois traçable.

c) Non car 65 n'est pas de la forme $5n^2 + 5$ car (x_n) est croissante et $x_2 = 25$; $x_3 = 50$ et $x_4 = 85$ (ou bien l'équation $65 = 5n^2 + 5$ donne $n = \sqrt{12}$ qui n'est pas un entier naturel).

4) *a*) $48 = 2 \times 24 = 4 \times 12 = 6 \times 8$ donc les couples homogènes de produit 48 sont (24 ; 2) ; (12 ; 4) et (8 ; 6).

b) En appliquant la propriété admise on obtient respectivement :

$$x = \frac{1}{4}(24^2 + 2^2 + 12^2 + 4^2) = 185 \text{ et alors } \sqrt{\mathbf{185}} = \begin{bmatrix} \frac{24+2}{2} \\ \frac{12-4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12+4}{2} \\ \frac{24-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{4}(24^2 + 2^2 + 8^2 + 6^2) = 170 \text{ et alors } \sqrt{\mathbf{170}} = \begin{bmatrix} \frac{24+2}{2} \\ \frac{8-6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8+6}{2} \\ \frac{24-2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{11} \\ \mathbf{7} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{4}(12^2 + 4^2 + 8^2 + 6^2) = 65 \text{ et alors } \sqrt{\mathbf{65}} = \begin{bmatrix} \frac{12+4}{2} \\ \frac{8-6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8+6}{2} \\ \frac{12-4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Partie 3 : Longueurs traçables et produit.

1) *a*) Par développements :

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

Et $(ad + bc)^2 + (ac - bd)^2 = (a^2d^2 + b^2c^2 + 2adbc) + (a^2c^2 + b^2d^2 - 2acdb) = a^2d^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + b^2d^2$

Ces deux développements étant égaux : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$

b) $\sqrt{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ et $\sqrt{y} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ donc $x = a^2 + b^2$ et $y = c^2 + d^2$

donc $x \times y = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$ d'après l'identité de Diophante.

Avec $(ad + bc)$ et $(ac - bd)$ entiers naturels ($(ac - bd) \geq 0$ car $a \geq b \geq 0$ et $c \geq d \geq 0$ donc $ac \geq bd$)

Donc $\sqrt{x \times y} = \begin{bmatrix} ad + bc \\ ac - bd \end{bmatrix}$.

2) 1625 = 25 x 65 avec $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$

Donc il vient, en choisissant une forme $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ pour chacun des deux facteurs :

* Avec $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\sqrt{\mathbf{1625}} = \begin{bmatrix} 5+0 \\ 40-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{5} \end{bmatrix}$
* Avec $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\sqrt{\mathbf{1625}} = \begin{bmatrix} 20+0 \\ 35-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{35} \\ \mathbf{20} \end{bmatrix}$
* Avec $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\sqrt{\mathbf{1625}} = \begin{bmatrix} 4+24 \\ 32-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{29} \\ \mathbf{28} \end{bmatrix}$
* Avec $\sqrt{25} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\sqrt{65} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$: $\sqrt{\mathbf{1625}} = \begin{bmatrix} 16+21 \\ 28-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{37} \\ \mathbf{16} \end{bmatrix}$

<u>Partie 4 : Application à une configuration dans l'espace.</u>

1) Dans OBC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $OC^2 = OB^2 + BC^2$

Et dans OAB rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $OB^2 = OA^2 + AB^2$

Donc $OC^2 = OA^2 + AB^2 + BC^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

2) a) $c^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$ donc $c^2 \leq 81$ donc $c \leq 9$

et $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3c^2$ donc $3c^2 \geq 81$ donc $c^2 \geq 27$ donc $c \geq 6$ car c est un entier

(Ou bien : si $c \leq 5$ alors $a \leq b \leq c \leq 5$ et donc $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$ donc $a^2 + b^2 + c^2 \neq 81$;

et si $c > 9$ alors $a^2 + b^2 + c^2 > 9^2 = 81$ donc $a^2 + b^2 + c^2 \neq 81$) donc $6 \leq c \leq 9$

b) Soit N(x , y , z) : N appartient à S si et seulement si $ON^2 = 9^2$ donc si et seulement si $x^2 + y^2 + z^2 = 81$

On cherche donc les N(a ; b ; c) de coordonnées entières tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 81$.

➔ *Supposons d'abord a, b, c entiers naturels avec $a \leq b \leq c$* (pour ordonner la recherche). On a donc $6 \leq c \leq 9$:

c = 6 : $a^2 + b^2 + 36 = 81$ donc $a^2 + b^2 = 45$ d'où (a ; b) = (3 ; 6) d'où le point P_6 = (3 ; 6 ; 6)

c = 7 : $a^2 + b^2 + 49 = 81$ donc $a^2 + b^2 = 32$ d'où (a ; b) = (4 ; 4) d'où le point P_7 = (4 ; 4 ; 7)

c = 8 : $a^2 + b^2 + 64 = 81$ donc $a^2 + b^2 = 17$ d'où (a ; b) = (1 ; 4) d'où le point P_8 = (1 ; 4 ; 8)

c = 9 : $a^2 + b^2 + 81 = 81$ donc $a^2 + b^2 = 0$ d'où (a ; b) = (0 ; 0) d'où le point P_9 = (0 ; 0 ; 9)

➔ *Par permutation de (a , b, c) on obtient : 3 points avec P_6 ; 3 points avec P_7 ; 6 points avec P_8 et 3 points avec P_9 soit exactement 3 + 3 + 6 + 3 = 15 points de coordonnées entières <u>naturelles</u> situés sur la sphère S.*

➔ *Pour obtenir les coordonnées pouvant être négatives il suffit d'effectuer des changements de signes et donc d'appliquer aux coordonnées de <u>chacun</u> des points associées à P_6, P_7, P_8 précédents un seul signe « - » (d'où 3 autres points) ou deux signes « - » (d'où 3 autres points) ou trois signes « - » (d'où 1 autre point) soit 7 <u>autres</u> points en tout de coordonnées entières relatives obtenus à partir de chacun des 12 points associés à P_6, P_7, P_8. Quant aux points associés à P_9, comme 0 = -0, on ne peut qu'ajouter un signe « - » à la valeur 9 pour obtenir un nouveau point par changement de signe, donc 1 point supplémentaire pour chacun des 3 points associés à P_9. Le nombre total de points à coordonnées entières appartenant à S est donc égal à $12 \times 8 + 3 \times 2 = 102$. CQFD*