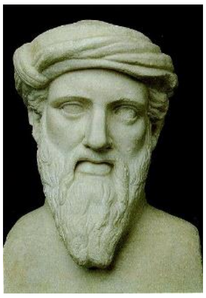
Le cercle des pythagoriciens



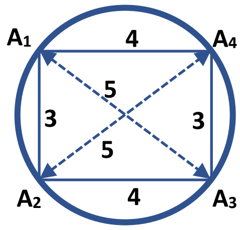
A Crotone (dans l'actuelle Italie), Pythagore (580 av. JC – 495 av. JC) a créé une école : la Fraternité pythagoricienne. Son fondement est, qu'à condition de choisir correctement l'unité, tout ensemble de nombres peut se ramener à des nombres entiers.

Chaque année les membres de cette fraternité décident de se réunir autour d'un cercle pour rendre compte de l'avancée de leurs recherches et, en l'honneur du maître Pythagore, il a été décidé que le diamètre de ce cercle doit être entier et que tous les membres de la fraternité doivent être à une distance entière de tous les autres…seulement les années passant, la fraternité comprend de plus en plus de membres…

Le but du problème est de savoir comment résoudre ce problème de disposition.

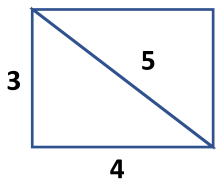
- Soit N un entier naturel non nul. On appellera **« N-Fraternité de diamètre entier »** un ensemble de N points distincts vérifiant les propriétés suivantes :
  - **Tous les points appartiennent à un même cercle de diamètre de longueur entière.**
  - **Chaque point est à une distance entière de tous les autres.**

  Dans l'exemple ci-contre, les sommets du rectangle $A_1A_2A_3A_4$ forment une 4-Fraternité de diamètre 5 car les points A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à un cercle de diamètre 5 et chaque point est à une distance entière des autres.

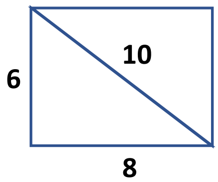


- **Un rectangle pythagoricien** est un rectangle dont les longueurs a, b des côtés et la longueur c des deux diagonales sont des entiers naturels non nuls. On notera (c ; b ; a) un tel rectangle.

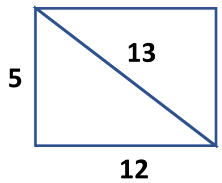
  Exemples de rectangles pythagoriciens (échelle non respectée) :



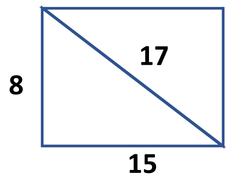
Rectangle (5 ; 4 ; 3)



Rectangle (10 ; 8 ; 6)



Rectangle (13 ; 12 ; 5)



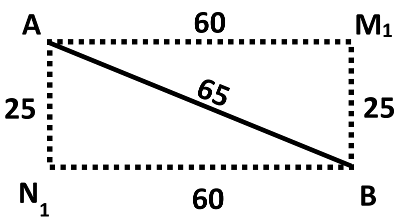
Rectangle (17 ; 15 ; 8)

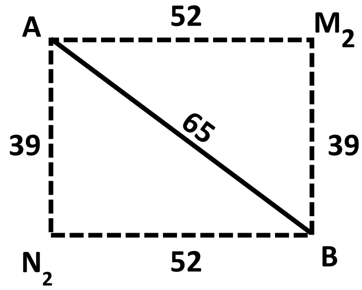
Dans ces exemples, les rectangles pythagoriciens (5 ; 4 ; 3) et (10 ; 8 ; 6) sont semblables (leurs longueurs sont proportionnelles, de rapport 2, on pourra écrire que (10 ; 8 ; 6) = 2 × (5 ; 4 ; 3)) alors que les trois rectangles pythagoriciens (5 ; 4 ; 3) ; (13 ; 12 ; 5) et (17 ; 15 ; 8) ne sont pas semblables deux à deux.

On admettra qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens non semblables deux à deux.

Partie 1 : Méthode des deux rectangles pythagoriciens.

1) Justifier que les quadrilatères AM_1BN_1 et AM_2BN_2 tracés ci-dessous sont des rectangles pythagoriciens :

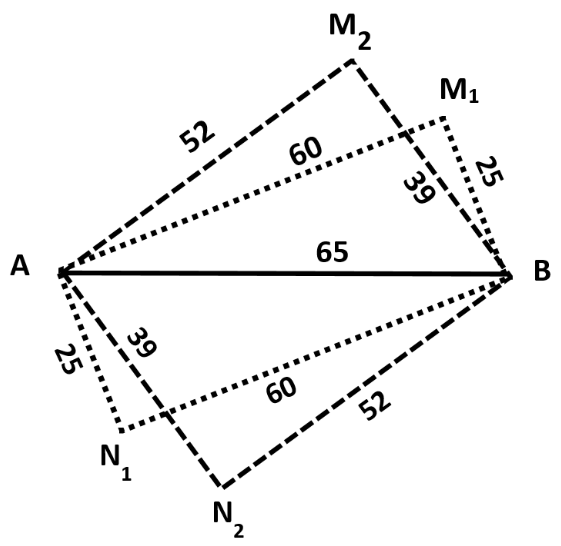




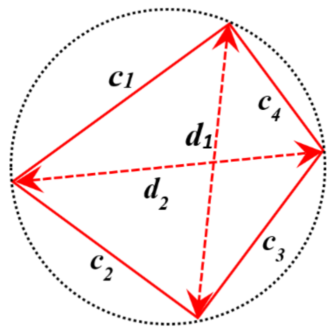
2) On a placé dans le schéma ci-contre les deux rectangles pythagoriciens précédents en y faisant correspondre les points A et B.

Soit O le milieu de [AB] :

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent au cercle de centre O et de diamètre 65.



3) Dans la suite du problème, on admettra le théorème de Ptolémée :



Soit un quadrilatère inscrit dans un cercle, alors : $c_1 \times c_3 + c_2 \times c_4 = d_1 \times d_2$
Où c_1, c_2, c_3, c_4 désignent les longueurs des quatre côtés
et d_1, d_2 sont les longueurs des deux diagonales du quadrilatère.

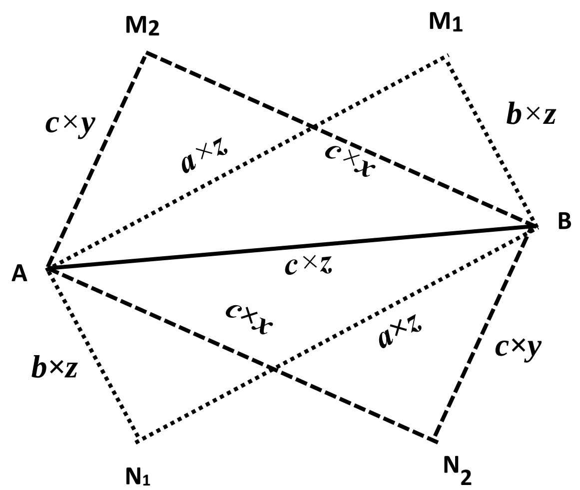
a) Calculer les longueurs M_1N_2 et M_1M_2 de la figure précédente.

b) Déduire que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

<u>Partie 2 : Généralisation.</u>

Soient (c ; b ; a) et (z ; y ; x) deux rectangles pythagoriciens non semblables.

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 de la figure ci-dessous forment une 6-Fraternité de diamètre $c\times z$.



<u>Partie 3 : Applications aux N-Fraternités</u>

1) Justifier qu'il existe une 8-Fraternité de diamètre 5 × 13 × 17 = 1 105.

2) Justifier qu'il existe une 2022-Fraternité de diamètre entier.

3) Justifier que pour tout entier naturel non nul N, il existe une N-Fraternité de diamètre entier.

Proposition de correction :

Partie 1 :

1) Justifier que les deux quadrilatères AM_1BN_1 et AM_2BN_2 tracés ci-dessous sont des rectangles pythagoriciens (échelle non respectée) :

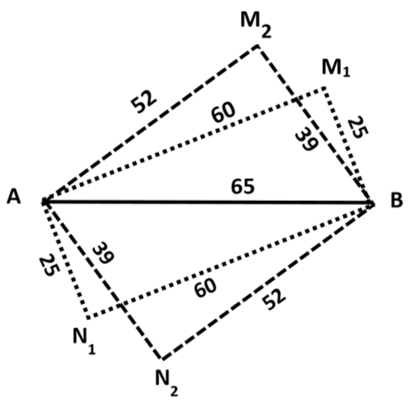
(65 ; 60 ; 25) = 5 × (13 ; 12 ; 5) et (65 ; 52 ; 39) = 13 × (5 ; 4 ; 3) avec (5 ; 4 ; 3) et (13 ; 12 ; 5) deux rectangles pythagoriciens, donc AM_1BN_1 et AM_2BN_2 sont deux rectangles pythagoriciens.

2) On a placé ci-dessous les deux rectangles pythagoriciens précédents en y faisant correspondre les points A et B.

Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent à un même cercle de diamètre 65.

Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu, donc les trois diagonales des deux rectangles sont de même longueur AB = 65 et concourent au milieu O de [AB]. On en déduit que A, B, N_1, M_1, N_2, M_2 appartiennent au cercle de centre O et de diamètre AB = 65.

3) *a*) Calculer les longueurs M_1N_2 et M_1M_2 de la figure précédente.



Dans AM_1BN_2 (inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) d'après le théorème de Ptolémée :

$65 \times M_1N_2 = 60 \times 52 + 25 \times 39 = 4095$

Donc $M_1N_2 = 4095/65 = 63$

Dans AM_2M_1B (inscrit dans le cercle de diamètre [AB]) d'après le théorème de Ptolémée :

$65 \times M_1M_2 + 52 \times 25 = 60 \times 39$

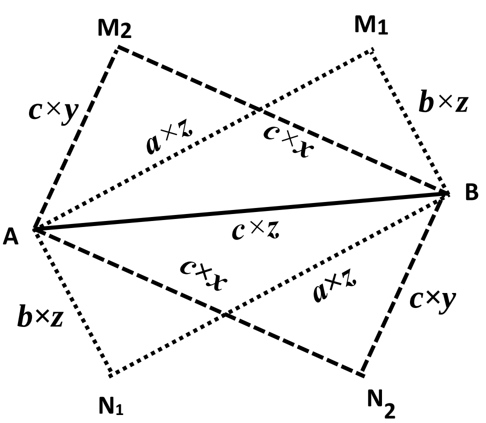
Donc $M_1M_2 = (2340 - 1300)/65 = 16$.

b) Déduire que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

D'après 2), les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont sur un cercle de diamètre 65 (entier). Par symétrie par rapport au milieu O de [AB] (centre du cercle contenant les 6 points) :

$N_1M_2 = M_1N_2 = 63$ et $N_1N_2 = M_1M_2 = 16$ ce qui nous assure que toutes les longueurs entre les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont toutes entières, donc A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 forment une 6-Fraternité de diamètre 65.

Partie 2 :



Montrer que les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 de la figure ci-dessous forment une 6-Fraternité de diamètre $c \times z$.

On a (cz ; bz ; az) = z(a ; b ; c) et (cz ; cy ; cx) = c(z ; y ; x) donc ce sont deux rectangles pythagoriciens non semblables et les A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 appartiennent donc au cercle de diamètre de longueur cz (entier)

On a des quadrilatères inscrits dans le cercle de diamètre [AB] donc d'après le théorème de Ptolémée :

- Dans AM_1BN_2:

  $cz \times M_1N_2 = az \times cy + bz \times cx = cz(ay + bx)$ donc $M_1N_2 = ay + bx$, une longueur entière.

- Dans AM_2M_1B :

  $cz \times M_1M_2 + cy \times bz = az \times cx$ donc $cz \times M_1M_2 = az \times cx - cy \times bz = cz(ax - by)$

  donc $M_1M_2 = ax - by$: entier naturel car le théorème de Ptolémée nous donne une longueur donc positive, et non nul car les rectangles (c ; b ; a) et (z ; y ; x) n'étant pas semblables les longueurs (b ; a) et (x ; y) ne sont pas proportionnelles donc $ax - by \neq 0$ (et donc M_1 et M_2 sont bien distincts)

- Enfin par symétrie par rapport au milieu O de [AB] (centre du cercle contenant les 6 points) :

  $N_1M_2 = M_1N_2$ et $N_1N_2 = M_1M_2$ donc entiers naturels non nuls d'après ce qui précède.

On en déduit que toutes les longueurs entre les points A, B, M_1, M_2, N_1, N_2 sont entières, donc on a bien une 6-Fraternité de diamètre AB = cz (entier)

Partie 3 :

1) Justifier qu'il existe une 8-Fraternité de diamètre 5 × 13 × 17 = 1 105

Soient (c, b, a) et (z ; y ; x) deux rectangles pythagoriciens. On a montré dans la Partie 2 qu'en plaçant les rectangles pythagoriciens $c(z ; y ; x) = (cz ; cy ; cx)$ et $z(c, b, a) = (cz ; bz ; az)$ le long d'une diagonale commune, on obtient une 6-Fraternité de diamètre cz.

Donc les rectangles pythagoriciens 13(5 ; 4 ; 3) = (65 ; 52 ; 39) et 5(13 ; 12 ; 5) = (65 ; 60 ; 25) forme une 6-Fraternité de diamètre 65 (déjà vu en Partie 1), et associés au rectangle pythagoricien (17 ; 15 ; 8), non semblable aux deux précédents, on déduit que les rectangles 17(65 ; 52 ; 39) ; 17(65 ; 60 ; 25) et 65(17 ; 15 ; 8) sont 3 rectangles pythagoriciens forment un ensemble de 8 points (les points A et B, et les 6 autres sommets M_i et N_i) sur le cercle de diamètre AB = 17 x 65 = 1105, tels que les distances entre 2 points sont toutes entières, on a donc bien une 8-Fraternité de diamètre 1105.

2) Justifier qu'il existe une 2022-Fraternité de diamètre entier.

Avec le raisonnement précédent, en considérant k rectangles pythagoriciens non semblables (ensemble non fini) notés (c_1 ; b_1 ; a_1) … (c_k ; b_k ; a_k), on peut obtenir, par multiplications successives une Fraternité de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_k$ et contenant 2 (points A et B) + k × 2 (sommets M_i ; N_i) = 2k + 2 points. Une 2022-fraternité sera donc obtenue avec k = 1010 rectangles pythagoriciens non semblables, de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_{1010}$

3) Justifier que pour tout entier naturel non nul N, il existe une N-Fraternité de diamètre entier.

Si N est pair, il suffit de prendre k rectangles pythagoriciens non semblables tels que N = 2 + 2k (k = (N-2)/2), pour obtenir une N-fraternité de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_k$

Si N est impair, on prend k tel que 2k + 2 = N+1 (k = (N-1)/2), on a alors une (N+1)-Fraternité, et il suffit d'enlever un de ces points (par exemple A) pour obtenir une N-Fraternité, de diamètre entier $c_1 \times c_2 \times \ldots \times c_k$ CQFD.

Complément :

La durée de l'épreuve nous a amené à faire admettre qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens non semblables.

Voici, à titre indicatif, et pour entraînement pour les futurs candidats aux olympiades, une méthode sous forme d'exercice permettant de démontrer cette propriété :

1) On montre qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) où x et n sont des entiers naturels non nuls :

Démonstration :

(n+1 ; n ; x) rectangle pythagoricien signifie $n^2 + x^2 = (n + 1)^2$

Ce qui équivaut, après développement, à $x^2 = 2n + 1$ donc à x^2 impair (et distinct de 1 car n est non nul), ce qui équivaut à x impair distincts de 1.

En posant $x = 2p + 1$ (p entier naturel non nul), il vient $x^2 = 4p^2 + 4p + 1$,

Et $x^2 = 2n + 1$ équivaut à $n = 2p^2 + 2p$ (et donc $n+1 = 2p^2 + 2p + 1$)

Les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) sont donc ceux du type :

$(2p^2 + 2p + 1 ; 2p^2 + 2p ; 2p + 1)$ avec p entier naturel non nul...donc en nombre infini (car les $2p^2 + 2p + 1$ obtenus seront tous distincts pour chaque valeur de p)

(Remarque : les premiers rectangles pythagoriciens que l'on obtient sont p = 1 : (5 ; 4 ; 3) ; p = 2 : (13 ; 12 ; 5) ; p = 3 : (25 ; 24 ; 7), assez classiques, que certains candidats auront peut-être déjà observés dans leur scolarité)

2) Les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) ne sont pas semblables deux à deux.

Démonstration :

En effet, soit deux rectangles Pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) et (k+1 ; k ; y), en les supposant semblables, de rapport a (a entier naturel non nul), les différences des longueurs (n+1) – n et (k+1) – k devraient donc aussi suivre ce rapport a, or (n+1) – n = 1 et (k+1) – k = 1 donc il ne peut y avoir que a = 1 comme rapport correspondant, donc ils sont identiques !

Il n'existe donc pas deux rectangles *semblables* du type (n+1 ; n ; x) qui soient distincts, donc les rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) ne sont pas semblables deux à deux.

3) Conclusion :

On a montré qu'il existe une infinité de rectangles pythagoriciens du type (n+1 ; n ; x) et que ces derniers ne sont pas semblables deux à deux, donc il existe une infinité de rectangles pythagoriciens non semblables deux à deux. (Remarque : cela ne signifie pas que toutes les familles infinies de rectangles pythagoriciens non semblables deux à deux sont nécessairement de la forme (n+1 ; n ; x), on a simplement extrait une famille particulière répondant à la question)