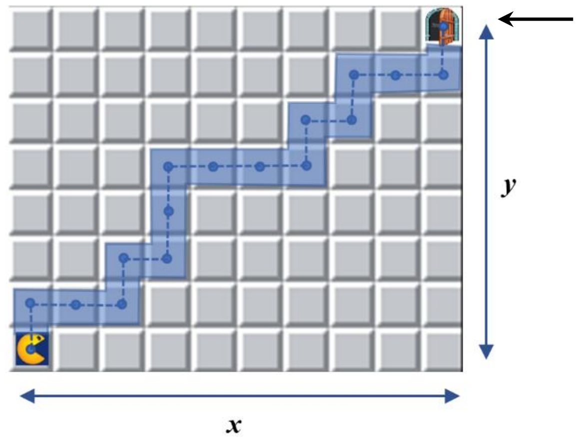
Problème « <u>Jeu vidéo</u> »

Un jeu vidéo est constitué d'une grille rectangulaire de x cases par y cases, x et y étant des entiers naturels non nuls (dans l'exemple d'illustration ci-dessous on a $x = 10$ et $y = 8$). Un personnage se trouvant en bas à gauche de la grille (case « départ ») doit rejoindre une porte située en haut à droite (case « arrivée ») en se déplaçant suivant deux directions : vers le haut ou vers la droite.

On appelle « chemin » l'ensemble des cases empruntées par le personnage (un exemple de chemin a été tracé ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier le nombre de chemins possibles entre la case de départ et la case d'arrivée, nombre que l'on notera C(x ; y).

Case « arrivée »



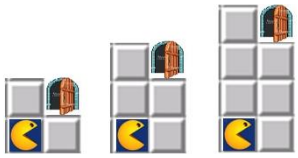
Case « départ »

1) Etude de premiers cas de C(x ; y) , $x \geq 1$ et $y \geq 1$:

a. Soit y quelconque. Donner la valeur de C(1 ; y)

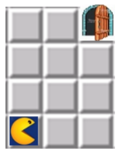
b. Donner les valeurs de C(2 ; 2) ; C(2 ; 3) ; C(2 ; 4)

Déterminer C(2 ; y) en fonction de y. Justifier la réponse.



c. Justifier que C(3 ; 4) = C(2 ; 4) + C(2 ; 3) + C(2 ; 2) + C(2 ; 1) puis calculer C(3 ; 4).

On rappelle que $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Préciser C(3 ; y) en fonction de y (en justifiant)



d. Justifier que C(y ; x) = C(x ; y)

2) Calcul de C(6 ; 6) :

En considérant les chemins passant par les cases A, B, C, D, E ou F de la grille ci-contre :

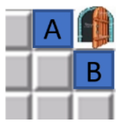
a. Justifier que C(6 ; 6) = 2 [$C^2(1 ; 6) + C^2(2 ; 5) + C^2(3 ; 4)$]

b. En déduire la valeur de C(6 ; 6)

3) Détermination des C(x ; y) et application à une situation de jeu :

a. En considérant les chemins passant par les cases A et B adjacentes à la porte, montrer que

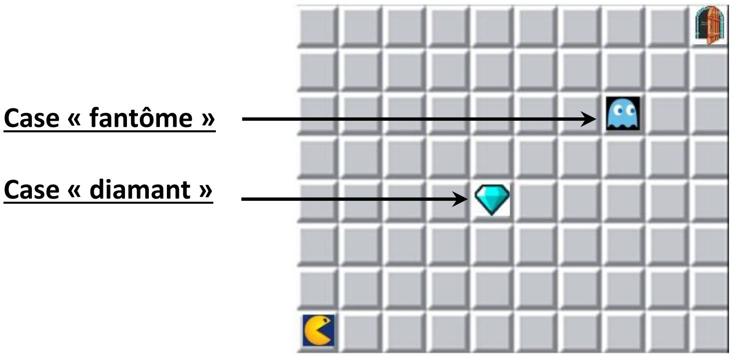
C(x ; y) = C(x - 1 ; y) + C(x ; y - 1)



b. Recopier et compléter alors le tableau des C(x ; y) ci-dessous :

6	1					
5	1					
4	1					
3	1					
2	1	2				
1	1	1	1	1	1	1
y / x	1	2	3	4	5	6

c. Application à une configuration de jeu :



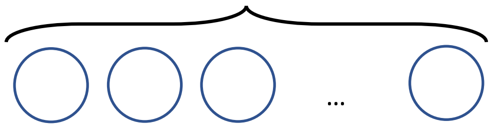
Le personnage doit rejoindre la case « arrivée » en passant par la case « diamant » et en évitant la case « fantôme ». Calculer le nombre de chemins gagnants, c'est-à-dire respectant ces deux contraintes.

4) Recherche explicite des C(x ; y) :

Pour représenter un chemin, chaque déplacement d'une case vers le haut est noté H et chaque déplacement d'une case vers la droite est noté **D**, ainsi le chemin donné en exemple au début de l'énoncé est représenté par H **D** **D** H **D** H H **D** **D** **D** H **D** H **D** **D** H

On admettra le résultat suivant :

n cases



p cases à cocher.

Si on veut cocher p cases parmi n cases (avec $p < n$), le nombre de possibilités est égal à $\frac{(p+1)\times(p+2)\times\ldots\times n}{1\times 2\times\ldots\times(n-p)}$, ce nombre est noté $\binom{n}{p}$.

a. Justifier que C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ et en déduire que pour $y \geq 2$, on a C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times 2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Utiliser le résultat précédent pour calculer la valeur de C(10 ; 8) puis déterminer la proportion du nombre de chemins gagnants de la question **3)** par rapport à la valeur C(10 ; 8) (arrondir à 10^{-4} près).

c. Recopier puis compléter l'algorithme ci-dessous permettant de calculer la valeur de C(x ; y) où x et y sont deux entiers ≥ 2 précisés par l'utilisateur et où C contiendra la valeur de C(x ; y).

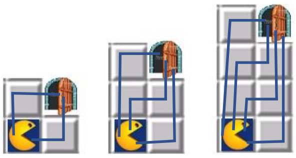
$N \leftarrow 1$
$D \leftarrow 1$
Pour k allant de 0 à $y - 2$
  | N ← N × (………)
  | D ← D × (………)
C ← …

Correction :

1)

a. Une grille 1 x y étant constituée d'une seule colonne, donc un seul chemin (en ligne droite) d'où C(1 ; y) = 1.

b.



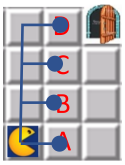
En traçant les différents chemins possibles on trouve facilement :

C(2 ; 2) = 2 C(2 ; 3) = 3 C(2 ; 4) = 4

Lorsqu'on ajoute une ligne, on a les chemins précédents (ceux passant par la case sous la porte) plus le chemin longeant toute la 1ère colonne donc le fait d'ajouter une ligne augmente le nombre de chemins de 1.

Autrement dit C(2 ; y + 1) = C(2 ; y) + 1 et comme C(2 ; 1) = 1, on déduit de proche en proche que C(2 ; y) = y.

c.



Les différents chemins peuvent se dénombrer en 4 cas : ceux passant par A, B, C, D (voir dessin)

puis rejoignant la porte, au nombre de C(2 ;4) ; C(2 ; 3) ; C(2 ;2) et C(2 ;1) respectivement.

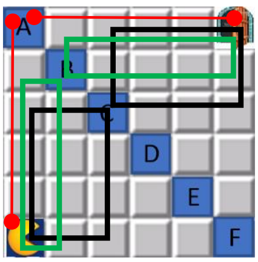
On déduit que C(3 ;4) = C(2 ;4) + C(2 ;3) + C(2 ;2) + C(2 ;1) = 4 + 3 + 2 + 1 = 10

En généralisant le raisonnement précédent on a : C(3 ; y) = C(2 ; y) + C(2 ; y-1) + … + C(2 ; 1)

Donc avec **c.** : C(3 ; y) = y + (y-1) + … + 1 = $\frac{y(y+1)}{2}$

d. La symétrie autour de la diagonale « personnage – porte » transforme un déplacement vers la droite en un déplacement vers le haut et inversement donc à tout chemin d'une grille x x y on peut associer un et un seul chemin solution d'une grille y x x et inversement, on en déduit donc que C(y ; x) = C(x ; y).

2.



Les chemins entre le personnage et la porte sont constitués exclusivement de ceux contenant A ; B ; C ; D ; E ou F (chacun contient une seule de ces cases)

Les chemins contenant A sont ceux reliant le personnage et A, au nombre de C(1 ; 6), suivi de ceux reliant A et la porte, au nombre de C(6 ; 1) donc on a :
C(1 ; 6) x C(6 ; 1) = C^2(1 ;6) chemins contenant A. Même résultat pour la lettre F.

De même il y a C^2(2;5) chemins contenant B ou E et C^2(3;4) chemins contenant C ou D.

Donc au total : C(6 ;6) = 2 [C^2(1 ;6) + C^2(2 ;5) + C^2(3 ;4)] donc C(6 ;6) = 2 [$1^2 + 5^2 + 10^2$] = 2 x 126 = 252.

3.

a. Les chemins de la grille x x y se composent exclusivement de ceux issus de A, au nombre de C(x-1 ; y) et de ceux issus de B, au nombre de C(x ; y-1) d'où au total : C(x ; y) = C(x-1 ; y) + C(x ; y-1).

b.

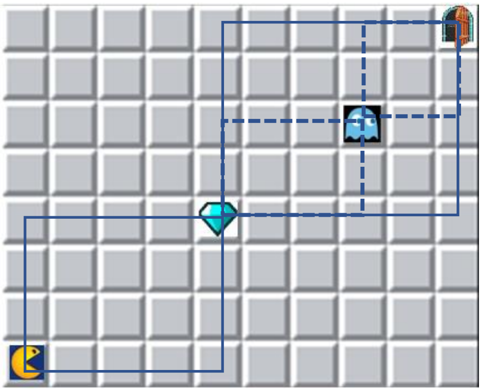
C(x-1 ;y)	**C(x ;y)**
	C(x ;y-1)

Cette relation permet de compléter de proche en proche les diagonales successives du tableau, on obtient

6	1	6	21	56	126	252
5	1	5	15	35	70	126
4	1	4	10	20	35	56
3	1	3	6	10	15	21
2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
y / x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Remarque : on retrouve en dernière case le fait que C(6 ; 6) = 252

c.



Les chemins solutions passent d'abord par ceux entre le personnage et le diamant, au nombre de C(5 ; 4) = 35 (d'après le tableau précédent), associés à ceux entre le diamant et la porte, au nombre de C(6 ; 5) = 126 privés de ceux contenant le fantôme, au nombre de C(4 ; 3) x C(3 ; 3) = 10 x 6 = 60.

On en déduit le nombre de chemins solutions :

35 x (126 – 60) = 35 x 66 = 2310.

4 .

a. Un chemin relie le personnage et la porte si et seulement si il est constitué de (x-1) déplacements vers la droite associés à ($y-1$) déplacements vers le haut. Le problème revient donc à placer ($x-1$) lettres **D** parmi une liste le ($x-1$) + ($y-1$) = $x+y-2$ emplacements. D'après la propriété le nombre de chemins est donc :

C(x ; y) = $\binom{x+y-2}{x-1}$ donc en appliquant la formule $\binom{n}{p}$ avec n = $x+y-2$ et p = $x-1$ (donc n – p = $y-1$) on trouve : C(x ; y) = $\frac{x\times(x+1)\times\ldots\times(x+y-2)}{1\times2\times\ldots\times(y-1)}$

b. Par application de cette formule C(10 ; 8) = $\frac{10\times11\times\ \ldots\ \times16}{1\times2\times\ldots\times7}$ = 11440 d'où la proportion $\frac{2310}{11440} = 0{,}2019$ (soit 20,19%) : les chemins « gagnants » représentent environ 20,19 % des chemins reliant les cases de départ et d'arrivée dans la grille 10 x 8 (environ 1 chemin reliant des cases de départ et d'arrivée sur 5 est « gagnant »)

c.

$N \leftarrow 1$

$D \leftarrow 1$

k allant de 0 à $y-2$

N ← **N × (x + k)**

D ← **D × (k + 1)**

C ← **N/D**