Problèmes d'isopérimétrie : éléments de correction.

A.1.a. Les hauteurs ont pour longueur $\frac{4\sqrt{(3)}}{2}$ et ainsi $Q=\frac{(3\times 4)^2}{4\sqrt{(3)}}=12\sqrt{(3)}$

A.1.b. De même, $Q=\frac{(3c)^2}{c^2\sqrt{(3)}/4}=12\sqrt{(3)}$. Les facteurs c^2 du numérateur et du dénominateur se simplifient : le quotient ne dépend plus de c.

A.2. $Q=\frac{(4c)^2}{c^2}=16.$

A.3. L'aire de chaque triangle équilatéral est $\frac{c^2\sqrt{3}}{4}$ (calculéé en A.1.b.). L'hexagone en comporte six dond son aire est égale à $\frac{6\times c^2\sqrt{(3)}}{4}$, et son périmètre à $6c$ d'où $Q=\frac{4\times 36c^2}{6c^2\sqrt{(3)}}=8\sqrt{(3)}$

B.1.L'un des triangles représentées a pour aire $\frac{cr}{2}$, l'aire du polygone est donc $\frac{ncr}{2}$.

Le périmètre est nc, on en déduit $Q=(nc)^2\times\left(\frac{ncr}{2}\right)^{-1}=\frac{2n^2c^2d}{ncr}=\frac{2nc}{r}$.

B.2. L'aire du disque inscrit est πr^2, elle est inférieure à l'aire du polygone, c'est à dire $\frac{ncr}{2}\geq\pi r^2$, d'où $\frac{nc}{2}\geq\pi r$ en simplifiant par r.

On en déduit $\frac{nc}{r}\geq 2\pi$ et donc $Q=2\times\frac{nc}{r}\geq 4\pi$

C.1.a. D'après l'inégalité triangulaire, le côté de longueur 2d a une longueur inférieur à la somme des longueurs des deux autres côtés, ce qui s'écrit $2d<2c$, d'où le résultat.
L'inégalité est stricte car dans le cas d'égalité le triangle est d'aire nulle, mais alors le rapport isopérimétrique n'est pas défini (ce fait reste implicite dans tout le problème).

C.1.b. La hauteur associée à la base de longueur $2d$ a pour longueur $\sqrt{(c^2-d^2)}$ donc le triangle a pour aire $d\sqrt{(c^2-d^2)}$. Son périmètre est $2(d+c)$ d'où $Q=\frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}$.

C.1.c. Avec $c=2d$, on trouve $Q=\frac{4(c+d)^2}{d\sqrt{c^2-d^2}}=\frac{4(3d)^2}{d\sqrt{3d^2}}=\frac{12\times 3d^2}{\sqrt{3}d^2}=12\sqrt{3}.$

Remarque : avec c=2d le triangle isocèle est équilatéral, et on retrouve heureusement la même valeur qu'en A.1.a.

C.1.d. On développe puis réduit le numérateur du membre de droite de l'égalité :

$$16(c-2d)^2(7d^2+8cd+c^2)=16(c^2-4cd+4d^2)(7d^2+8cd+c^2)=16(c^4+4c^3d-21c^2d^2+4cd^3+28d^4).$$

D'autre part $Q^2-(12\sqrt{3})^2=\frac{4^2(c+d)^4-3^3 4^2 d^2(c^2-d^2)}{d^2(c^2-d^2)}=\frac{16}{d^2(c^2-d^2)}\left((c+d)^4-27d^2(c^2-d^2)\right)$ en mettant sur le même dénominateur. On développe $\left((c+d)^4-27d^2(c^2-d^2)\right)$, on trouve

$$c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^4+d^4-27c^2d^2+27d^4=c^4+4c^3d-21c^2d^2+4cd^3+28d^4.$$

Le résultat est établi.

C.1.e. On note D le membre de droite de l'égalité donnée. Tous les facteurs de D sont positif pour toutes les valeurs des paramètres. Avec l'identité remarquable,

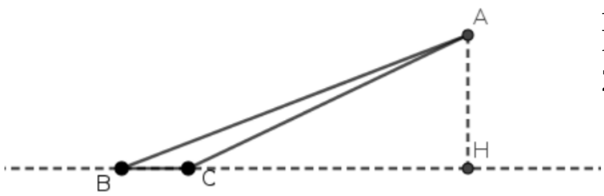
$Q^2-(12\sqrt{3})^2=(Q-12\sqrt{3})(Q+12\sqrt{3})=D\geq 0,$ d'où $Q-12\sqrt{3}=\dfrac{D}{Q+12\sqrt{3}}\geq 0,$ ce qui montre qu'on a $Q\geq 12\sqrt{3}$ pour tout triangle isocèle. Le rapport isopérimétrique de tout triangle équilatéral est donc toujours inférieur à celui de tout triangle isocèle.

C.2.a. La hauteur issue de C' a pour longueur la distance h entre (d) et (AB) pour tous ces triangles, et la longueur AB ne change pas. L'aire, qui vaut $h\dfrac{AB}{2}$, ne dépend pas de C'.

C.2.b. Considérons le symétrique B' de B par rapport à (d). La distance AB' est le plus court chemin entre A et B' donc $AB'\leq AC+CB'=AC+CB$. Comme C' est sur $[AB']$,
$AB'=AC'+C'B'=AC'+C'B\leq AC+CB$.

C.2.c. Le périmètre d'un triangle quelconque est supérieur à celui du triangle isocèle construit à la question précédente. Leurs aires étant égales, le rapport isopérimétrique d'un triangle quelconque est supérieur au rapport isopérimétrique du triangle isocèle qui lui est associé par la question précédent. D'après la question C.1.d, le rapport isopérimétrique de ce triangle isocèle est supérieur à $12\sqrt{3}$. On conclut en constatant que $12\sqrt{3}\geq 4\pi$.

C.3. Il s'agit de s'éloigner le plus possible du triangle isocèle. Pour simplifier, on peut rechercher un triangle ABC comme ci-dessous et d'aire 1, avec par exemple BC = 1cm et pour hauteur AH=2cm.



En notant x = BH, son périmètre est minoré par 2x. Pour que le rapport isopérimétrique soit supérieur à 2020, il suffit donc que $(2x)^2\geq 2020$, soit $x\geq\dfrac{\sqrt{2020}}{2}\approx 22{,}47$.

Le triangle schématisé ci-dessus avec BH = 22,5cm convient, et si l'on est assez soigneux on peut le tracer sur une feuille A4.