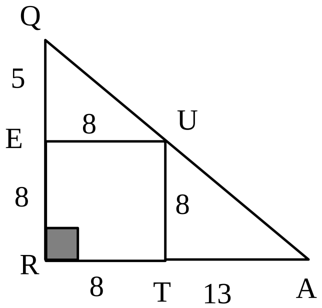
Géométrie – des figures qui trompent

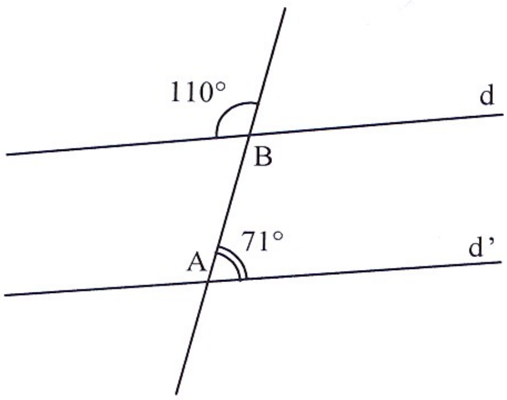
1. Un carré dans un triangle ?

Le dessin ci-contre est un dessin à main levée.
Les dimensions sont données en cm.
Les points *Q*, *U* et *A* sont-ils alignés ?



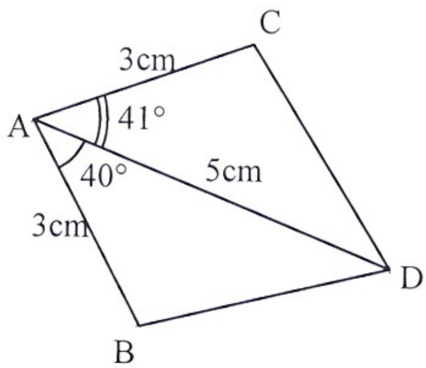
2. Des parallèles

Les droites *d* et *d'* sont-elles parallèles ?



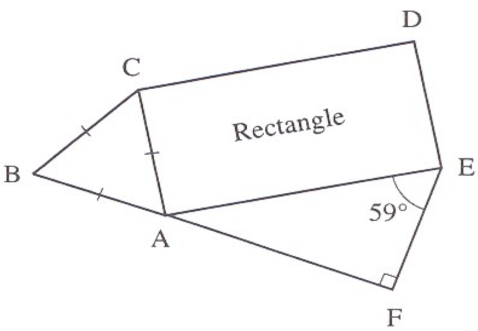
3. Un cerf-volant ?

Construire en vraie grandeur le quadrilatère *ABDC*, ci-dessous.
Les segments [*BD*] et [*CD*] ont-ils la même longueur ?



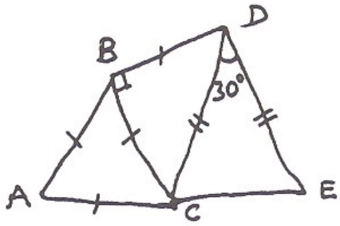
4. Un rectangle et des points alignés ?

Observe cette figure codée.
Les points B, A, F semblent alignés.
Le sont-ils ? Justifie ta réponse.



5. Des triangles et des points alignés ?

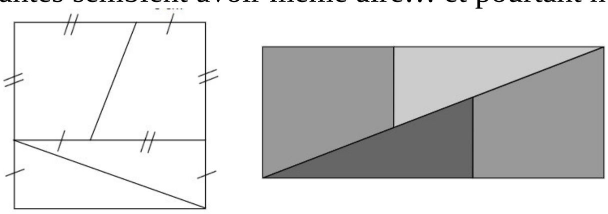
Voici la représentation à main levée d'une figure.



Calcule tous les angles de la figure en écrivant ton raisonnement.
Les points A, C, E sont-ils alignés ? Pourquoi ?

6. Lewis Caroll

Par découpage les deux figures suivantes semblent avoir même aire… et pourtant non (calculer).



Comment expliquer ce phénomène ?

7. En connaissez-vous d'autres ?

Géométrie – construction et raison

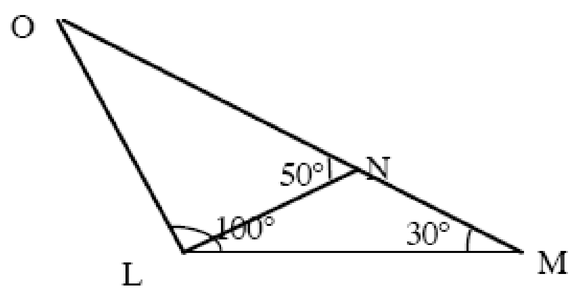
1. Symétrique d'un point par rapport à une droite

On donne une droite *d*, les points *A* et *B* non situés sur *d*, ainsi que le point *A'* symétrique de *A* par rapport à *d*. Construire le point *B'* symétrique de *B* par rapport à *d*, en utilisant la règle seule.

2. Perpendiculaire

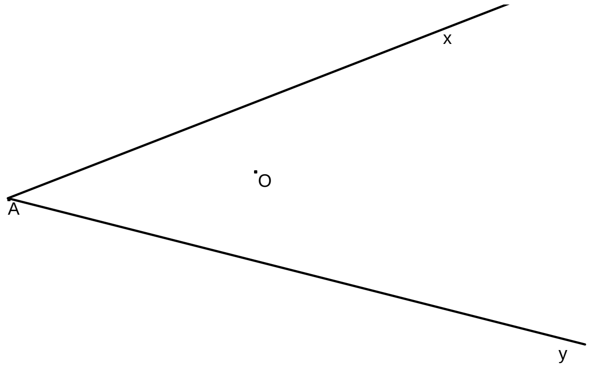
Étant donné un cercle de diamètre [*AB*] et un point *P* situé ni sur le cercle, ni sur la droite (*AB*), tracer, uniquement avec une règle non graduée, la perpendiculaire à (*AB*) issue de *P*.

3. Des triangles et des angles…

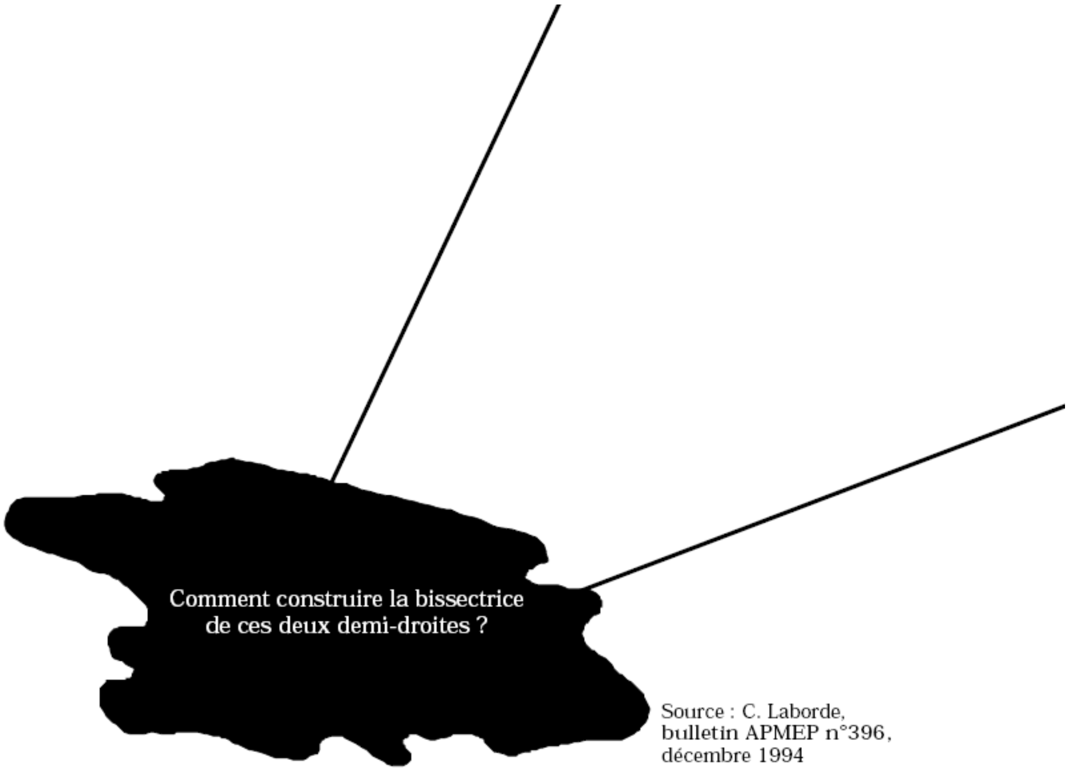
OLM est un triangle. Le point N appartient au segment [OM]. De plus, ONL = 50° ; OLM = 100° ; OML = 30° et LM = 15 cm. La figure ci-contre est mal construite ; elle ne correspond pas aux données. Construis une figure respectant cet énoncé. Explique ta méthode.	

4. Milieu d'un segment

Comment tracer une droite passant par *O* de sorte que *O* soit le milieu d'un segment dont les extrémités soient portées [*Ax*) et [*Ay*) ?



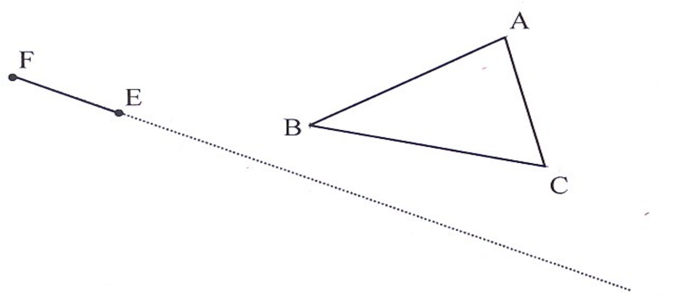
5. Construction de la bissectrice d'un angle



Source : C. Laborde, bulletin APMEP n°396, décembre 1994

6. Quand le périmètre s'en mêle…

En utilisant uniquement la règle non graduée et le compas, construire un triangle *EFG* isocèle en *G* et de même périmètre que le triangle *ABC*.



7. Autres ?

Géométrie – des figures impossibles ?

1. Quadrilatère difficile

Construire un quadrilatère qui a seulement trois angles droits.

2. Triangle spécial

Existe-t-il un triangle de côtés 4 cm, 5 cm, et 9 cm ?

3. La plus grande longueur possible ?

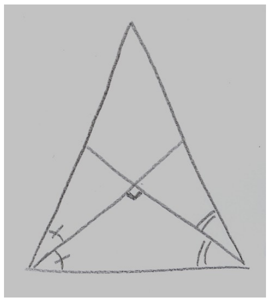
L'arc $\widehat{AB}$ est un quart de cercle de centre *O*. *C* est un point de cet arc. La perpendiculaire à (*OA*) passant par *C* coupe (*OA*) en *M* et la perpendiculaire à (*OB*) passant par *C* coupe (*OB*) en *N*. De plus *CN* = 8 cm et *AM* = 2 cm.
Où placer le point *C* pour que la longueur *MN* soit la plus grande possible ?

4. La plus grande aire possible ?

Soit un triangle *ABC* donné. Construire un triangle *ABD* dont le sommet *D* est placé sur la parallèle à (*AB*) passant par *C*. Comment placer le point *D* pour que l'aire du triangle *ABD* soit la plus grande possible ?

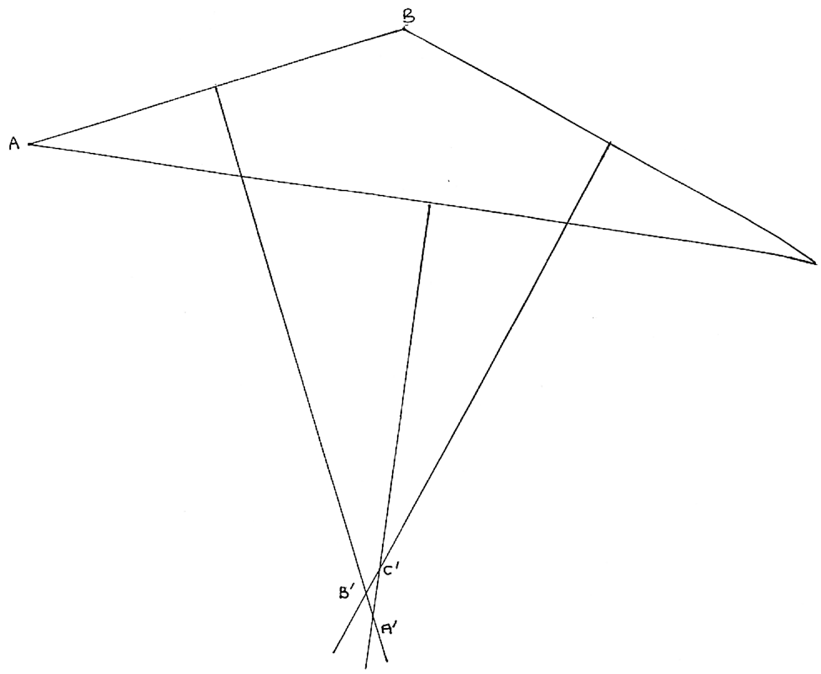
5. Bissectrice

Peut-on tracer un triangle dont deux bissectrices sont perpendiculaires ?



6. Agrandir ?

Tracer *ABC* triangle avec $\widehat{ABC}$ = 160°, *AB* = 10 cm et *BC* = 8 cm. Tracer les médiatrices de [*AB*], [*BC*] et [*CD*].



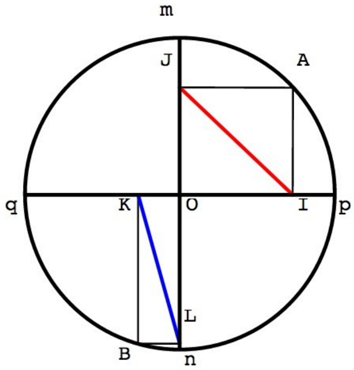
Construire un triangle *ABC* avec d'autres mesures (d'angle, de longueurs), de façon à ce que *A'B'C'* soit le plus grand possible.

7. Autres ?

Géométrie – des figures pour débattre !

1. Quelle est la longueur la plus grande ?

La figure ci-contre représente un cercle de centre O *et deux de ses diamètres perpendiculaires.*
OIAJ *et* OKBL *sont deux rectangles.*
Quel est le plus long des deux segments [IJ] *ou* [KL] *?*

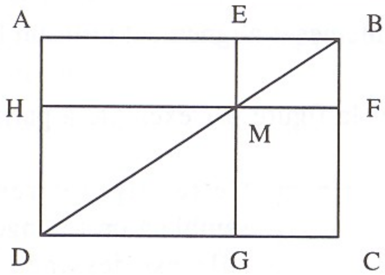


Extrait du projet de document d'accompagnement « géométrie », 2007

2. Quel est le triangle qui a l'aire la plus grande ?

On considère un triangle *ABC* tel que *AB* = 15 cm, *AC* = 10 cm et *BC* = 13 cm et *M*, le milieu de [*AB*].
Comparer les aires des triangles *AMC* et *CMB*.

3. Quel est le rectangle qui a l'aire la plus grande ?



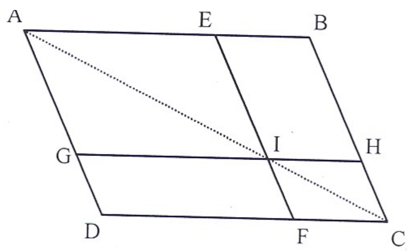
ABCD est un rectangle.
Sur la diagonale [BD], on a placé un point M.
Par M, on a tracé les parallèles (EG) et (HF) aux côtés du rectangle ABCD.

Pierre dit que l'aire du rectangle AEMH est plus grande que celle du rectangle FMGC.
Paul dit que c'est l'aire du rectangle FMGC qui est la plus grande.
Jacques dit qu'elles sont toutes les deux égales.
Qui a raison ?

4. Quel est le parallélogramme qui a l'aire la plus grande ?

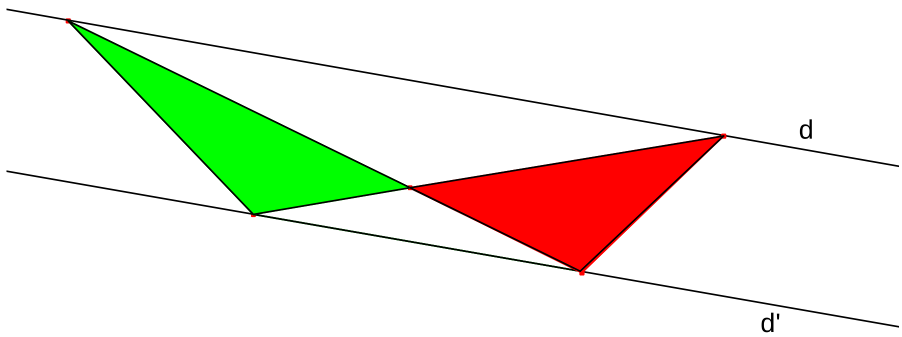
Dans la figure ci-contre :
(AD) // (EF) // (BC)
(AB) // (GH) // (DC)
(AC), (EF) et (GH) sont concourantes en I.

Des parallélogrammes EBHI et GIFD, quel est celui qui a la plus grande aire ?

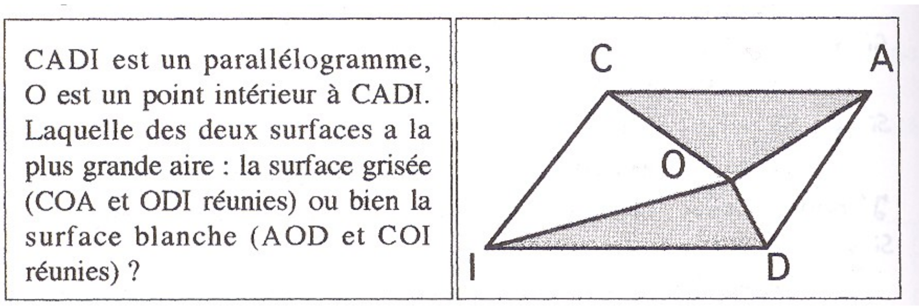


5. Quelle est « l'aile du papillon » qui a l'aire la plus grande ?

Les droites *d* et *d'* sont parallèles.



6. Quelle est la surface qui a l'aire la plus grande ?


CADI est un parallélogramme, O est un point intérieur à CADI. Laquelle des deux surfaces a la plus grande aire : la surface grisée (COA et ODI réunies) ou bien la surface blanche (AOD et COI réunies) ?

Probabilités et statistiques

1. Probabilités en classe de 2^nde^ / classe de 3^e^

On dispose de deux porte-monnaie identiques.
Le premier contient trois billets de 10 € et cinq billets de 20 €.
Le deuxième contient deux billets de 10 € et quatre billets de 20 €.
On choisit au hasard un porte-monnaie et on tire à l'aveugle un billet de ce porte-monnaie.
Quelle est la probabilité de choisir un billet de 10 € ? Un billet de 20 € ?

2. Probabilités en classe de 2^nde^ / classe de 3^e^

On lance deux dés non truqués à six faces. Si on fait la somme des résultats des faces supérieures on a alors la probabilité de la somme 7 supérieure à celle d'obtenir la somme 11. L'affirmation est-elle vraie ou fausse ?

3. Probabilités en classe de 2^nde^ / classe de 3^e^

Un square est équipé de trois bancs à deux places. Deux personnes arrivent successivement et s'installent au hasard. Quelle est la probabilité que ces personnes soient assises côte à côte ?

4. Probabilités en classe de 2^nde^ / classe de 3^e^

Sur un segment *S*, on prend au hasard deux points *A* et *B*. On considère l'événement « la longueur du segment [*AB*] est strictement supérieure à la moitié de celle du segment *S* ». Quelle est la probabilité de cet événement ?

5. Sondages (Statistique en classe de 2^nde^)

Le dernier sondage de 2002 ne prévoyait pas la présence de Jean-Marie Le Pen au second tour. Le dernier sondage CSA d'avril 2007 plaçait J-M Le Pen devant F. Bayrou. Les sondages sont-ils scientifiques ?

6. Pollution et sex-ratio « alerte » statistique (Statistique en classe de 2^{nde})

Dans un village du Canada entre 1999 et 2003, sur 132 naissances, il n'y a eu que 46 garçons. Est-ce très étonnant ? Est-ce inquiétant (sachant que de nombreuses usines chimiques se trouvent à proximité) ?

Arithmétique flash

1. Vrai/Faux

n est un nombre entier naturel

- Le successeur d'un nombre impair est impair.
- $4n$ est un nombre pair.
- $2n + 3$ est un multiple de 3
- $10n + 3$ se termine par 3.
- $n^2 + 1$ est un nombre impair.
- $1000n + 56$ est un multiple de 8.
- $n + 4$ est un nombre pair.
- n^2 et $(n+1)^2$ sont tous les deux pairs.
- $5n+15$ est un multiple de 5.
- Zéro est un nombre pair.

2. Dictée algébrique

n est un nombre entier naturel

- Un nombre impair.
- Un multiple de 7.
- Un nombre qui laisse un reste de 4, lorsqu'on le divise par 5.
- Un nombre carré pair.
- Un nombre carré impair.
- Un nombre différence de deux nombres consécutifs.
- Un nombre, somme de trois nombres pairs consécutifs.

3. Carrés d'impairs

Calcule le carré de quelques nombres impairs.
Que remarques-tu sur la parité des nombres obtenus ?
Est-ce toujours vrai ?

4. A la suite !

Étant donné un nombre entier, est-il toujours possible de trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale au nombre donné ?
ou
Est-il toujours possible d'écrire un nombre comme la somme de trois nombres entiers consécutifs ?

5. Différence impaire

Tous les nombres impairs peuvent-ils s'écrire comme différence de deux carrés ?

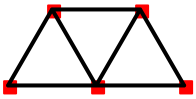
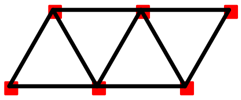
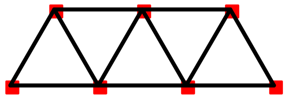
6. Contre exemple

Document d'accompagnement 2009
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf et 2016
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf
Exemple : La somme des chiffres de 42 est un multiple de 6 et 42 est un multiple de 6 (idem pour 84).
Peut-on en déduire que si la somme des chiffres d'un nombre entier est un multiple de 6, alors ce nombre est un multiple de 6 ?

Généralisations ?

1. Des allumettes

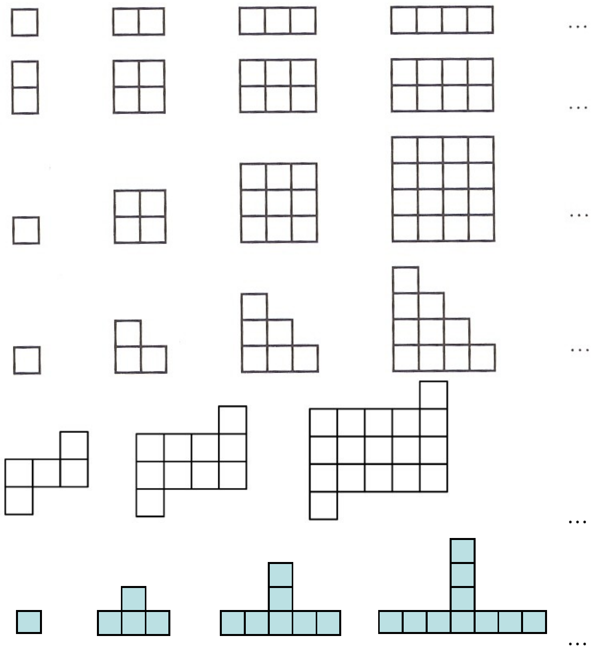
À chaque étape, des triangles sont construits avec des allumettes…

Étape 0		Étape 1		Étape 2	

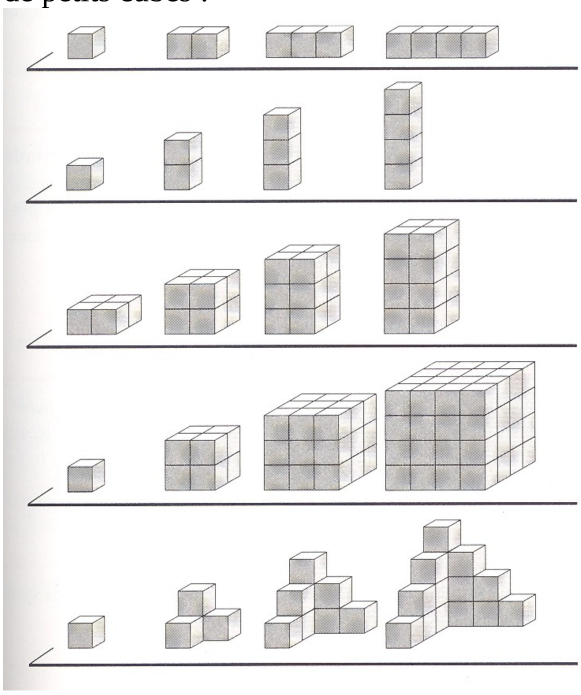
- Combien d’allumettes sont utilisées pour l’étape 0 ? Pour l’étape 1 ? Pour l’étape 2 ?
- Combien d’allumettes sont utilisées pour l’étape 3 ? Pour l’étape 8 ?
- Combien d’allumettes sont utilisées pour l’étape 100 ? Pour l’étape 1000 ?
- Trouver le nombre d’allumettes utilisées pour n’importe quelle étape.
- Quelle est l’étape (si elle existe) pour laquelle on utilise 423 allumettes ? 585 allumettes ? Et 386 allumettes ?

2. Des carrés, des cubes

Mêmes questions avec les séquences suivantes de petits carrés :



de petits cubes :



3. Est-ce que ça marche toujours ?

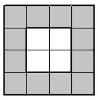
Peut-on généraliser les propriétés qui semblent se dégager des premiers calculs dans chaque situation ?

Première situation	*Deuxième situation*	*Troisième situation*	*Quatrième situation*
$2^2 + 2^2 = 2^3$	$2^2 - 1^2 =$	$15^2 =$	$21 \times 29 =$
$3^2 + 3^2 + 3^2 = 3^3$	$3^2 - 2^2 =$	$25^2 =$	$22 \times 28 =$
$4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = 4^3$	$4^2 - 3^2 =$	$45^2 =$	$23 \times 27 =$
	$5^2 - 4^2 =$		

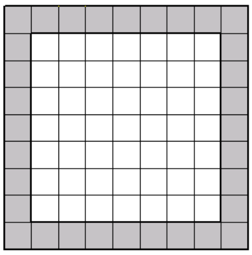
4. Premiers

$n^2 + n + 41$ est-il un nombre premier ?

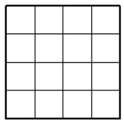
5. Le carré bordé !



Carré 2



Carré 7

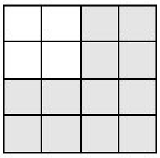


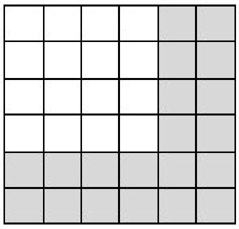
Carré 4
(à compléter)

- Sur chaque figure, quel est le nombre de carreaux en bordure ?
- Quel est le nombre de carreaux en bordure pour le carré 56 ?
- Existe-t-il un carré qui ait 404 carreaux en bordure ? Si oui, lequel ?
- Existe-t-il un carré qui ait 486 carreaux en bordure ? Si oui, lequel ?

(voir aussi le doc. Acc. 2009)

Il est possible de faire le même type de travail avec les figures suivantes par exemple :





Programmes de calcul

1. Le programme « du prestidigitateur »

À faire faire par plusieurs élèves simultanément :

Choisir un nombre (ne pas l'oublier), ajouter 8.
Multiplier le nombre obtenu par 3. Soustraire 4.
Ajouter le nombre choisi au départ. Diviser par 4. Ajouter 2.
Soustraire le nombre choisi au départ.

2. Équivalence

Voici deux programmes de calcul.

Programme A

- Choisir un nombre.
- Le multiplier par 6.
- Ajouter 4 au résultat.

Programme B

- Choisir un nombre
- Calculer son triple
- Ajouter 2
- Multiplier le résultat par 2

1) Appliquer ces deux programmes de calcul aux nombres 10 et -5.
2) Prouver que ces deux programmes de calcul donnent toujours le même résultat, quel que soit le nombre choisi au départ.

3. Douzaines

- Démontrer que le nombre obtenu est un multiple de 8.
- Démontrer que le nombre obtenu est un multiple du nombre choisi.

Choisir un nombre entier positif,
multiplier par 2, ajouter 1,
élever au carré,
soustraire 1.

4. Two similar problems

http://www.nrich.maths.org/public/index.php

Think of a whole number bigger than 2. Square it.
Subtract the number you first thought of
Is the number you're left with odd or even?
What do you notice? Can you explain why?

Think of two whole numbers under 10.
Take one of them and add 1. Multiply by 5.
Add 1 again.
Double your answer. Subtract 1.
Add your second number. Add 2.
Double again. Subtract 8
Halve this number and tell me your answer.
From your answer I can work out both your numbers very quickly. How?

Think of a number.
add on one more than that number.
Add 9.
divide by 2.
take away your original number.
Will it always end up with 5?

5. Retrouvailles

- Tester avec deux valeurs numériques distinctes que le texte écrit ci-dessous est correct.
- Tester sur une feuille de calcul Excel que le texte est correct.
- Prouver que le texte écrit ci-dessus est correct.

« Vous invitez une personne à choisir un nombre, puis à effectuer les opérations suivantes:
Choisir un nombre,
multiplier ce nombre par 5,
ajouter 6 au produit obtenu,
multiplier la somme obtenue par 4,
ajouter 9 au nouveau produit obtenu,
multiplier la somme par 5.
Demander le résultat final. Vous en soustrayez 165, vous divisez ce qui reste par 100 et cette dernière opération vous donne le nombre choisi »

6. Le magicien

Le professeur : « Pensez à un nombre, multipliez par 2, enlevez 3, multipliez le résultat par 3 et enlevez le nombre de départ. Quel est le nombre que vous obtenez ? »

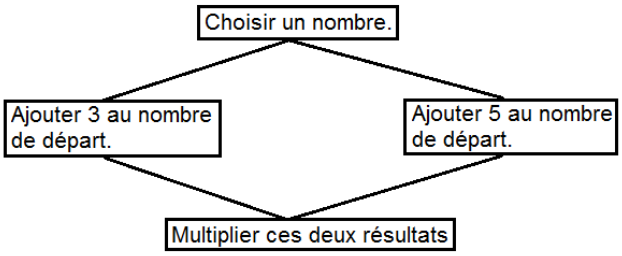
Un élève : « 31 »
Le professeur : « Le nombre pensé au départ est … »
L'élève : « Oui »

Qu'a répondu le professeur ?

7. Avec des arbres

Voici un arbre de calcul et un programme de calcul.

Arbre de calcul



Programme de calcul

- Choisir un nombre.
- Calculer le carré du nombre de départ.
- Ajouter 8 fois nombre de départ.
- Ajouter 15 au résultat.

1) Appliquer l'arbre puis le programme à trois nombres différents.
2) Prouver que, pour un même nombre de départ, ces deux calculs donneront toujours le même résultat.

8. Avec des arbres

Voici un programme de calcul :

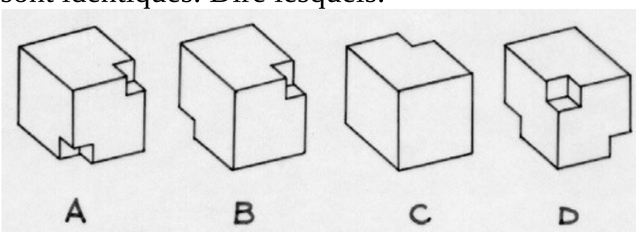
- Choisir un nombre,
- Lui ajouter 7,
- Multiplier cette somme par 3,
- Soustraire 8 au résultat,
- Soustraire le triple du nombre de départ.

1) Après quelques essais numériques, quelle conjecture peut-on formuler ?
2) Démontrer cette conjecture.

Raisonner

1. Disjonction des cas

Document d'accompagnement des programmes 2009 . https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/textes_officiels/officiel2009/doc_acc_clg_raisonnement_demonstration.pdf
Exemple : Ces dessins représentent quatre cubes en bois dont certains coins ont été évidés.
Deux seulement de ces solides sont identiques. Dire lesquels.



2. Questions invraisemblables

- Des poules et des lapins

Dans la cour de la ferme, il y a des poules et des lapins. J'ai pu compter 15 têtes.
J'ai compte aussi 42 pattes. Pourrais-tu m'aider à trouver le nombre de poules et le nombre de lapins ?

- Des chocolats

Trois groupes d'enfants se partagent 120 chocolats.
Le deuxième groupe reçoit quatre fois le nombre de chocolats du premier groupe.
Le troisième groupe reçoit trois chocolats de plus que le deuxième groupe.
Combien de chocolats chacun des trois groupes reçoit-il ?

- Des timbres

Marie, Paul et Brenda ont ensemble une collection de timbres.
Si Marie en a 6 fois plus que Paul, que Benda en a 128 de moins que Marie et que Paul en possède 32, quel est le nombre de timbres des trois enfants ?

- Bas de laine

Marc a quatre fois plus d'économies que Pauline. Blandine a deux fois moins d'argent que Marc. Pauline a 33,60 euros de moins que Marc.
Quelle est la somme totale économisée par les trois enfants ?

- Les cinq frères

Cinq frères et sœurs ont hérité de cinq terrains carrés dont les mesures des côtés sont cinq entiers consécutifs.
Les terrains sont situés de part et d'autre d'un chemin de la manière suivante :
– Les trois plus petits terrains sont à gauche de ce chemin, et les deux plus grands sont à droite.
– Les surfaces totales de part et d'autre du chemin sont équivalentes.
Quelles sont les dimensions de chaque terrain ?

3. Algèbre et géométrie

Un segment [*AB*] a pour longueur 10 cm. On place un point *M* sur le segment [*AB*].
On construit un triangle équilatéral *AMC* et un carré *MBDE*.
Déterminer la longueur *AM* pour laquelle le carré et triangle ont le même périmètre.

Modéliser

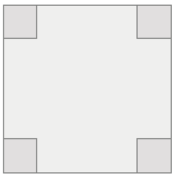
Certaines difficultés techniques (résolution d'équations, maximum de fonction, etc.) peuvent être abordées expérimentalement (géométrie dynamique) ou à l'aide du calcul formel (xcas répond par exemple « 50 » à la commande « fMax(x(100-x)) », Geogebra permet aussi ce type de calcul).

1. Géométrie

- Famille de rectangles

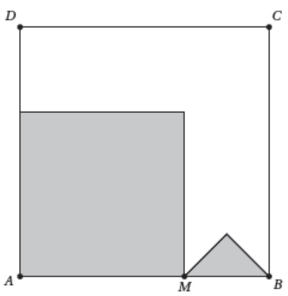
Parmi tous les rectangles de périmètre 200 m, quel est celui d'aire maximale ?

- Boite



ABCD est un carré de côté 10 cm.
On enlève un même carré à chaque coin de ABCD pour obtenir le patron d'une boîte.
Comment obtenir une boîte dont le volume sera maximal ?
(voir aussi le doc. Acc. 2009)

- Carré et triangle



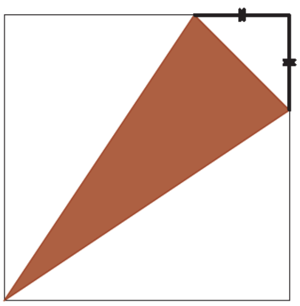
Le carré *ABCD* a un côté de longueur 8 cm.
M est un point du segment [*AB*].
On dessine comme ci-contre dans le carré *ABCD* :

- un carré de côté [*AM*] ;
- un triangle rectangle isocèle de base [*MB*].

On s'intéresse au motif constitué par le carré et le triangle.

Est-il possible de faire en sorte que l'aire du motif soit la plus grande possible ? la plus petite possible ? Si oui dans quels cas ?

- Fleurs



On dispose d'un terrain carré de 20 mètres de côté.

On veut installer un parterre de fleurs, représenté sur le schéma ci-dessous par la zone grisée.

Peut-on construire un parterre de fleurs qui occupe une surface

a) de 150m² ?
b) de 128m² ?
c) de 100m² ?

2. Situations de Recherche pour la Classe (SiRC, IREM de Grenoble)

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/IMG/pdf/sirc_paf_200fd7f.pdf

http://www2.animath.fr/old/UE/UE04/grenier-godot.pdf

Exemple 1 : Etant donné un polymino (grille carrée) de taille quelconque avec un « trou » d'une case, pour quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ? Le trou peut se situer n'importe où, y compris sur un bord ou un coin du polymino. On peut poser la même questions avec des triminos (longs ou coudés).

Exemple 2 : On se donne un grille rectangulaire (un polymino) qui représente un champ, un ensemble de polyminos plus petits (dominos, ou triminos longs, ou triminos coudés) qui seront des types de bêtes et un ensemble d'uniminos qui seront des pièges. Les ensembles de bêtes et de pièges sont aussi grands que l'on veut. Sachant que les bêtes se posent le long des cases de la grille (et non en travers), pour chaque type de bêtes, quel est le plus petit nombre de pièges qui assure la protection du champ ? On ne mélange pas les types de bêtes.

3. PISA

https://euler.ac-versailles.fr/webMathematica/textes_officiels/pisa/PISA_lib_math_items_2011.pdf

Exemple : Estimez l'aire de l'Antarctique en utilisant l'échelle de cette carte.