Le principe de récurrence

Exercices de démonstration par récurrence.

Exercice 1 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = \dfrac{-1}{8} \times u_n^2 + 2$.

1. A l'aide de l'application «suites » de la calculatrice hp prime, conjecturer des bornes pour la suite (u_n).
2. Démontrer.

Résolution.

1. Détails de fonctionnement :
   (a) On appuie sur Apps puis on touche l'icône «suite».
   (b) Après avoir appuyé éventuellement sur la touche Symb : on entre la valeur de u0, on sélectionne dans le menu l'option u1(n+k) pour pouvoir exprimer u1(n+1) en fonction de u1(n).
   (c) Appuyez ensuite sur la touche plot, régler l'échelle (avec les doigts !)
   (d) Appuyez sur la touche num si besoin pour affiner votre conjecture
2. On conjecture que 0 et 2 bornent la suite.
   On démontre par récurrence.
   On note P_n : $u_n \in [0;2]$.

   Amorce $u_0 = 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 2$, P_0 vraie.

   Hérédité Soit m un entier tel que P_m serait vraie (hypothèse de récurrence). On veut démontrer que, sous cette hypothèse, il n'est pas possible que P_{m+1} soit faux.
   De l'hypothèse de récurrence $0 \leqslant u_m \leqslant 2$, on déduit $0 \leqslant u_m^2 \leqslant 4$ (car la fonction carré conserve l'ordre sur $[0;+\infty[$).
   On en déduit $\dfrac{-1}{8} \geqslant \dfrac{-1}{8} u_m^2 \geqslant \dfrac{-1}{2}$ en multipliant chaque membre par le réel négatif $\dfrac{-1}{8}$.
   On ajoute enfin 2 à chaque membre : $\dfrac{15}{8} \geqslant \dfrac{-1}{8} u_m^2 + 2 \geqslant \dfrac{3}{2}$
   d'où $0 \leqslant \dfrac{3}{2} \leqslant u_{m+1} \leqslant \dfrac{15}{8} \leqslant 2$, donc P_{m+1} ne peut pas être faux sous l'hypothèse que P_m est vraie.

   Conclusion La suite (u_n) est bornée par 0 et 2. □

Exercice 2 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $\in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. A l'aide de la calculatrice hp prime, calculer et représenter graphiquement la suite.
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n à partir des résultats précédents.
3. Démontrer.

Résolution.

1. On trace avec l'application suite. la représentation graphique suggère une expression du second degré.
2. Méthodes pour obtenir une équation du second degré.
   (a) On lit sur l'écran les valeurs des deux racines d'où une expression en $u_n = an(n-12)$. On calcule ensuite a en utilisant une image (obtenue en basculant sur la partie "Num").
   (b) Par résolution de systèmes. On cherche une fonction f d'expression $f(x) = ax^2+bx+c$ telle que (touche Num pour obtenir rapidement les valeurs de la suite) $f(0) = 0$ (donc $c = 0$) $f(1) = -11$, $f(2) = -20$ soit $a+b = -11$ et $4a+2b = -20$.
      i. Résolution manuelle.
      ii. Résolution par l'outil calculatrice. On sélectionne l'application «solveur linéaire», on on sélectionne dans le bandeau 2×2, on entre les coeff, on obtient $a = 1$ et $b = -12$.
   (c) Deuxième outil. Interpolation de Lagrange. On appuie sur la touche CAS, boite à outils/-polynômes/spécial/Lagrange.
      On entre lagrange ([0,1,2],[0,−11,−20]) . On obtient $f(x) = x\times(x-12)$. □
3. On note $\mathrm{P}_n : u_n = f(n)$.

   Amorce. $u_0 = f(0)$

   Hérédité. Soit m un entier naturel tel que $u_m = f(m)$. On veut établir qu'il n'est pas possible que $u_{m+1} \neq f(m+1)$.
   De l'hypothèse $u_m = f(m)$, on déduit $u_m+2m-11 = f(m)+2m-11$.
   On a donc, sous l'hypothèse que $u_m = f(m)$: $u_{m+1} = (m^2-12m)+2m-11$, soit $u_{m+1} = 2m^2-10-11$. Or $f(m+1) = (m+1)^2-12(m+1) = m^2+2m+1-12m-12 = m^2-10m-11$.
   Ainsi P_{m+1} ne peut être fausse lorsque P_m est vraie.

   Ccl. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.

Exercice 3 – On définit une suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{4+u_n^2}$. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis démontrer.

Résolution.
Conjecture avec la calculatrice. On entre 0 dans le CAS. On entre ensuite $\sqrt{\text{Ans}^2+4}$ et on appuie plusieurs fois sur ENTER. On conjecture aisément la formule $u_n = 2\sqrt{n}$.
$u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 2\sqrt{2}$; $u_3 = 2\sqrt{3}$, $u_4 = 2\sqrt{4}$...

Exercice 4 – Est-il vrai que, pour tout entier naturel n, 4^n-1 est multiple de 3 ?

Résolution.

1. Dans le tableur :
   (a) colonne A : les entiers 0,1,2,3...
   (b) colonne B : les termes de la suite

   (c) colonne C : les termes divisés par 3

   Il semble que tous les nombres de la colonne C soient entiers.

2. Démonstration par récurrence. □

Exercice 5 – 1. Déterminer, avec la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 100n$.

2. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n > 100n$.

Résolution.

1. Méthode 1. Avec l'apps fonction. On entre les fonctions $\mathrm{F1(X)} = 2^{\mathrm{X}}$ et $\mathrm{F2(X)} = 100 \times \mathrm{X}$. Avec les doigts, on dézoome et on fait défiler. On cherche le point pour lequel la courbe 1 semble passer au-dessus de la courbe 2 et on tapote dessus pour avoir l'abscisse associée. On calcule ensuite $2^9 = 512$, $100 \times 9 = 900$, $2^{10} = 1024$, $100 \times 10 = 1000$ pour confirmer la lecture.
2. Méthode 2. Avec l'apps «tableur».
3. Méthode 3. On écrit un programme.

   Shift, 1, Nouveau, on le nomme.

```
EXPORT GG()
BEGIN
LOCAL N;

N:=1;
WHILE (2^N < 100*N) DO
N:=N+1;
END;
PRINT(N);
END;
```

   On obtient $\mathrm{N} = 10$.

Il reste ensuite à démontrer à l'aide d'une récurrence (hérédité à partir du rang 10...)

Exercice 6 (annales du bac) – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Est-il vrai que $u_n > n^2$ pour tout entier naturel n ?
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n puis la démontrer.

Résolution.

Dans le tableur, entrer les entiers naturels en colonne A, les termes de la suite en colonne B, les carrés des entiers en colonne C. permet de conjecturer la réponse oui à la première question et de conjecturer facilement (les colonnes B et C étant identiques avec décalage d'une cellule) : $u_n = (n+1)^2$. □