

Une aventure clés en main

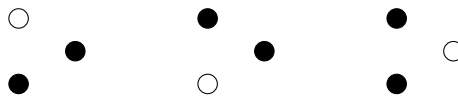
Lara, une brillante aventurière, explore les ruines d'une civilisation oubliée. Elle trouve d'abord deux clés identiques dans un coffre bien caché. Dans une salle mystérieuse à l'autre bout des ruines, elle découvre un levier à côté d'une majestueuse porte fermée, et des serrures adaptées aux clés qu'elle a trouvées.

Elle réussit à déchiffrer l'inscription suivante : « Pour ouvrir la porte des élus, placer les deux clés chacune dans une serrure puis abaissez le levier. Prenez garde, seules certaines serrures permettent d'ouvrir la porte, les autres empêchent son ouverture. » Lara remarque que même en insérant les clés elle ne peut pas distinguer les serrures **fonctionnelles**, qui permettent d'ouvrir la porte, des serrures **bloquantes**, qui en empêchent l'ouverture.

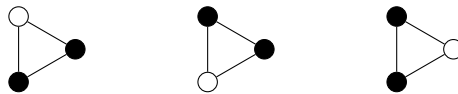
On dit que Lara fait un **essai** quand elle a placé ses deux clés chacune dans une serrure, et qu'elle abaisse le levier. On dit que l'essai **teste** les serrures. Si les deux serrures testées sont fonctionnelles, la porte s'ouvre l'essai est **réussi**. Si le levier retourne dans sa position de départ sans que la porte ne s'ouvre, l'essai **échoue** et au moins une des deux serrures testées est bloquante. Dans ce cas, l'aventurière doit réessayer.

Un ensemble d'essais est **certain** si pour chaque configuration des serrures fonctionnelles et bloquantes, au moins un des essais sera réussi. Le **nombre optimal d'essais** est le nombre k tel qu'il existe un ensemble certain de k essais mais il n'existe pas d'ensemble certain avec un nombre d'essais strictement inférieur.

Pour représenter une configuration on peut symboliser les serrures fonctionnelles par ● et les serrures bloquantes par ○. Dans le cas où il y a trois serrures : deux serrures fonctionnelles et une serrure bloquante, alors il y a trois configurations possibles, représentées ci-dessous.



Un essai peut être représenté par un trait reliant les serrures testées. L'ensemble de trois essais représenté ci-dessous est certain puisque pour chaque configuration au moins un essai teste les deux serrures fonctionnelles.



Partie A – Première porte

Dans cette salle, il y a quatre serrures : trois sont fonctionnelles et une est bloquante. Lara numérote au hasard les serrures de 1 à 4 pour pouvoir garder une trace de ses essais. L'essai testant les serrures 1 et 3 sera noté 1 – 3 ou 3 – 1 (l'ordre n'a pas d'importance).

- A.1.** a) Proposer un ensemble certain d'essais.
b) Justifier qu'un seul essai ne suffit pas à ouvrir la porte pour toutes les configurations.
c) En déduire que le nombre optimal d'essais est 2.
- A.2.** Déterminer la probabilité que Lara réussisse à ouvrir la porte à son premier essai si elle place les clés dans des serrures choisies totalement au hasard.

Partie B – Deuxième porte

Lara réussit à ouvrir la porte des élus. Derrière, elle trouve une autre pièce avec la même énigme mais avec plus de serrures. Cette fois, il y a trois serrures fonctionnelles et deux bloquantes. Les serrures sont numérotées de 1 à 5, sans savoir lesquelles sont fonctionnelles ou bloquantes.

- B.1.** Dans cette question Lara tente l'ensemble d'essais $\{1 - 2 ; 3 - 4 ; 1 - 5\}$ mais ils échouent tous. Proposer des numéros où peuvent se trouver les serrures fonctionnelles.
- B.2.** En justifiant soigneusement, décrire un ensemble certain de quatre essais.
- B.3.** Soit E un ensemble quelconque de trois essais exactement.
- a) Justifier qu'au moins une serrure a été choisie pour au moins deux essais.
 - b) Démontrer qu'il existe une configuration des serrures pour laquelle les trois essais échouent.
- B.4.** Justifier que le nombre optimal d'essais est 4.

Partie C – Toujours plus de portes

À partir de la salle suivante, et à chaque fois que Lara réussit à ouvrir une porte, elle trouve une énigme similaire avec f serrures fonctionnelles et b serrures bloquantes, où f et b sont des nombres entiers avec $f \geq 2$ et $b \geq 0$. Une configuration des serrures dans ce cas est appelée $(f; b)$ -configuration, tandis qu'un ensemble certain pour cette énigme est dit $(f; b)$ -certain.

Le nombre d'essais d'un ensemble E est noté $|E|$.

On note $O(f; b)$ le nombre optimal d'essais correspondant à cette situation, c'est-à-dire le plus petit nombre $|E|$ pour E un ensemble $(f; b)$ -certain.

- C.1.** Dans cette question, $f = b = 3$. Il y a donc 6 serrures dont la moitié sont fonctionnelles.
- a) Déterminer un ensemble $(3; 3)$ -certain de 6 essais.
 - b) Démontrer que $O(3; 3) = 6$. On pourra prendre un ensemble quelconque de 5 essais et se ramener à la situation de la question **B.4**.
- C.2.**
- a) Démontrer que pour tout $f \geq 2$, $O(f; b) \geq b + 1$.
 - b) Démontrer que si $f \geq b + 2$ alors $O(f; b) = b + 1$.
- C.3.** Dans une des salles, Lara trouve un papier avec des inscriptions en partie effacées qui semblent résumer les découvertes d'une personne l'ayant précédée. Ce document est présenté en annexe. Compléter les informations manquantes directement sur l'annexe en suivant la logique utilisée.

Si S est un ensemble de serrures (fonctionnelles ou bloquantes), la **clique** associée à S est l'ensemble de tous les essais testant n'importe quelle paire de serrures de S .

Par exemple, la clique associée à deux serrures est l'essai testant ces deux serrures. La clique associée aux serrures 1, 2, et 3 est $\{1 - 2 ; 1 - 3 ; 2 - 3\}$.

Des cliques sont **disjointes** si et seulement si aucune serrure n'est testée par deux cliques.

- C.4.** Démontrer que le seul ensemble $(2; b)$ -certain est la clique associée aux $b + 2$ serrures.

En déduire que $O(2; b) = \frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

C.5. Le but de cette question est de construire pour tout $f \geq 2$ et $b \geq f - 2$ un ensemble $(f; b)$ -certain d'essais constitué de l'union de $f - 1$ cliques disjointes. On notera $E(f; b)$ cet ensemble d'essais.

a) Si $b = f - 2$, proposer sans justifier un ensemble de $b + 1 = f - 1$ essais qui convient pour $E(f; b)$.

Dans la suite de cette question, on prend $f \geq 2$ et $b \geq f - 2$, et on suppose construit l'ensemble $(f; b)$ -certain $E = E(f; b)$. On numérote de 1 à $f + b$ les serrures, et on ajoute une serrure qu'on numérottera $f + b + 1$.

b) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors la serrure $f + b + 1$ est fonctionnelle.

c) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors il y a exactement une serrure fonctionnelle testée par chaque clique de E .

d) Construire un ensemble $E' = E(f; b + 1)$ tel que :

- E' est $(f; b + 1)$ -certain ;
- $|E'| = |E| + k$ où k est le nombre de serrures associées à la plus petite clique de E .
- E' est l'union de $f - 1$ cliques disjointes.

Démontrer soigneusement ces trois propriétés.

C.6. Étude de $|E(f; b)|$:

a) Expliquer pourquoi si $f - 1 \leq b < 2(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$.

b) Expliquer pourquoi si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.

c) Démontrer que si $q(f - 1) \leq b < (q + 1)(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + q + 1$.

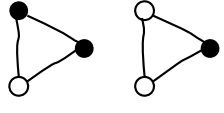
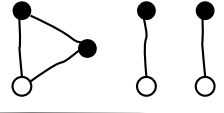
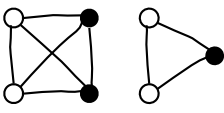
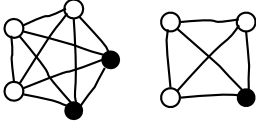
d) En déduire que si $b = q(f - 1) - 1$ avec $q \geq 1$ alors :

$$|E(f; b)| = (f - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + q)$$

Pour aller plus loin après l'épreuve : il est possible de démontrer la propriété suivante (ce n'est pas demandé aux candidats et ne peut pas être admis pour répondre aux questions) :

$$O(f; b) = |E(f; b)| = \frac{q(q + 1)(f - 1)}{2} + (q + 1)(r + 1)$$

Annexe : document trouvé par terre par Lara

	$f = 3$	$f = 4$
$b = 3$		
$b = 4$		
$b = 5$		
$b = 6$		

Correction

Partie A – Première porte

- A.1.** a) Proposer un ensemble certain d'essais.
 $\{1 - 2 ; 3 - 4\}$ est certain.
- b) Justifier qu'un seul essai ne suffit pas à ouvrir la porte pour toutes les configurations.
Il suffit que la serrure bloquante soit l'une des deux serrures choisies lors de l'unique essai pour que cet essai soit raté.
- c) En déduire que le nombre optimal d'essais est 2.
Il existe un ensemble certain à deux essais, mais aucun à un seul essai : le nombre optimal d'essais est bien 2.
- A.2.** Déterminer la probabilité que Lara réussisse à ouvrir la porte à son premier essai si elle place les clés dans des serrures choisies totalement au hasard.
Pour que la porte s'ouvre dès le premier essai il faut et il suffit que les deux serrures choisies soient fonctionnelles. Il y a ainsi 3 possibilités pour la première serrure et 2 pour la deuxième, soit 6 choix possibles pour faire un essai réussi. Puisque l'ordre dans lequel les serrures sont choisies n'a aucune importance, il y a exactement 3 essais réussis.
- Le nombre d'essais possibles est $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.
- Par équiprobabilité, la probabilité qu'un unique essai soit réussi est donc $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Partie B – Deuxième porte

- B.1.** Dans cette question Lara tente l'ensemble d'essais $\{1 - 2 ; 3 - 4 ; 1 - 5\}$ mais ils échouent tous. Proposer des numéros où peuvent se trouver les serrures fonctionnelles.
Si les serrures 2, 4 et 5 sont fonctionnelles (et les serrures 1 et 3 bloquantes) alors les trois essais sont ratés.
- B.2.** En justifiant soigneusement, décrire un ensemble certain de quatre essais.
L'ensemble d'essais $\{1 - 2 ; 1 - 3 ; 2 - 3 ; 4 - 5\}$ est certain. En effet, si au moins deux des serrures 1, 2 et 3 sont fonctionnelles alors au moins un des trois premiers essais est réussi puisqu'on essaie toutes les combinaisons. Sinon, au plus une de ces serrures est fonctionnelle et les deux serrures fonctionnelles qui restent sont forcément 4 et 5 ce qui rend le dernier test réussi.
- B.3.** Soit E un ensemble quelconque de trois essais exactement.
- a) Justifier qu'au moins une serrure a été choisie pour au moins deux essais.
Si les deux premiers essais n'ont aucune serrure en commun, alors quatre des cinq serrures ont été testées. Le troisième essai doit alors tester au moins une de ces quatre serrures qui sera alors testée par deux essais.
- b) Démontrer qu'il existe une configuration des serrures pour laquelle les trois essais échouent.
Prenons une serrure testée par au moins deux essais, et décidons que cette serrure est bloquante. Les deux essais échouent donc. Il reste un seul essai et quatre serrures, trois fonctionnelles et une bloquante. Positionnons la deuxième et dernière serrure bloquante sur une des deux serrures testées par ce dernier essai. Les trois serrures fonctionnelles sont placées aux emplacements non encore choisis. Par construction, les

trois essais échouent, et l'on a bien construit la configuration demandée : l'ensemble E n'est pas certain.

B.4. Justifier que le nombre optimal d'essais est 4.

Tout d'abord, aucun ensemble de un ou deux essais ne peut être certain car il serait alors possible de rajouter des essais quelconques pour créer un ensemble de trois essais, certain lui aussi. Aucun ensemble de strictement moins de quatre essais n'est certain, et on a construit un ensemble certain à quatre essais : c'est donc le nombre optimal.

Partie C – Toujours plus de portes

C.1. a) Déterminer un ensemble $(3; 3)$ -certain de 6 essais.

$\{1-2; 1-3; 2-3; 4-5; 4-6; 5-6\}$. Si les trois premiers essais échouent, alors il y a au moins deux serrures bloquantes parmi 1, 2, et 3. Il ne reste donc qu'au plus une serrure bloquante dans 4, 5, et 6, ce qui fait qu'au moins un des trois derniers essais réussit.

b) Démontrer que $O(3; 3) = 6$.

Soit E un ensemble de 5 essais. Les 5 essais ne peuvent pas être deux à deux disjoints car il y a $f + b = 6 < 10$ serrures. Une des serrures est donc testée par au moins deux essais. En y plaçant une serrure bloquante, tous ces essais sont ratés et les essais qui restent forment un ensemble E' d'essais pour les cinq autres serrures. Or il reste au maximum 3 essais pour 3 serrures fonctionnelles et 2 bloquantes. L'ensemble E' n'est donc pas certain et E non plus puisqu'on rajoute deux essais ratés à la configuration qui fait rater tous les essais de E' .

En définitive, $O(3; 3) > 5$. La question précédente permet d'assurer que $O(3; 3) \leq 6$ et ainsi $O(3; 3) = 6$.

C.2. a) Démontrer que pour tout $f \geq 2$, $O(f; b) \geq b + 1$.

Soit E un ensemble $(f; b)$ -certain. Tant qu'il reste au moins une serrure bloquante à placer, il existe un essai de E dont aucune des serrures n'a été affectée car E est certain. On positionne alors une serrure bloquante sur cet essai qui est ainsi raté. Placer ensuite les serrures fonctionnelles dans les emplacements non affectés complète la configuration pour laquelle b essais sont ratés. Puisque E est certain, il y a donc au moins un essai réussi, soit au moins $b + 1$ essais au total.

b) Démontrer que si $f \geq b + 2$ alors $O(f; b) = b + 1$.

Supposons $f \geq b + 2$. Puisqu'il y a $f + b \geq 2(b + 1)$ serrures, on peut fixer un ensemble E de $b + 1$ essais deux à deux disjoints. Au plus b de ces essais contient une serrure bloquante, donc au moins un essai est réussi. On a un ensemble $(f; b)$ -certain de $b + 1$ essais donc $O(f; b) \leq b + 1$, et grâce à la question précédente $O(f; b) = b + 1$.

C.3. Compléter les informations manquantes directement sur l'annexe en suivant la logique utilisée.

	$f = 3$	$f = 4$
$b = 3$		
$b = 4$		
$b = 5$		
$b = 6$		

C.4. Démontrer que le seul ensemble $(2; b)$ -certain est la clique associée aux $b + 2$ serrures. En déduire que $O(2; b) = \frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

Soit E un ensemble $(2; b)$ -certain. Pour toute paire (a, b) de serrures, la configuration où seules a et b sont fonctionnelles ne permet qu'un seul essai réussi : $a - b$. Puisque E est certain, c'est que $a - b \in E$, et ce pour tous (a, b) . En définitive, E est la clique de tous les essais possibles, qui sont au nombre de $\frac{(b+1)(b+2)}{2}$.

C.5. a) Si $b = f - 2$, proposer sans justifier un ensemble de $b + 1 = f - 1$ essais qui convient pour $E(f; b)$.

Il y a $f + b = 2b + 2$ serrures. On peut donc choisir $b + 1$ essais sans aucune serrure en commun. Ce sont bien $b + 1$ cliques disjointes, et cet ensemble est $(f; b)$ -certain car c'est l'ensemble construit en question 7.b.

b) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors la serrure $f + b + 1$ est fonctionnelle.

Si la serrure $f + b + 1$ est bloquante alors la configuration des $f + b$ premières serrures est une $(f; b)$ -configuration et au moins un essai de E est réussi.

c) Justifier que si une $(f; b + 1)$ -configuration fait échouer tous les essais de E alors il y a exactement une serrure fonctionnelle testée par chaque clique de E .

S'il y a plus d'une serrure fonctionnelle dans une clique de E alors cette clique abrite un essai réussi. Il y a donc au plus une serrure fonctionnelle par clique. Or E contient $f - 1$ cliques et il y a $f - 1$ serrures fonctionnelles (l'une est en position $f + b + 1$ donc hors des serrures essayées par E). Il y a donc exactement une serrure fonctionnelle par clique.

d) Construire un ensemble $E' = E(f; b + 1)$ tel que :

- E' est $(f; b + 1)$ -certain ;
- $|E'| = |E| + k$ où k est le nombre de serrures associées à la plus petite clique de E .
- E' est l'union de $f - 1$ cliques disjointes.

Démontrer soigneusement ces trois propriétés.

Prenons la plus petite clique C de E , et pour chaque serrure s associée à C ajoutons à E l'essai $s-f+b+1$. On ajoute bien k essais qui agrandissent C en une clique associée à $C \cup \{f + b + 1\}$. Le nombre de cliques reste ainsi inchangé.

Enfin, toute $(f; b + 1)$ -configuration a soit un essai réussi dans E , soit un essai réussi entre $f + b + 1$ et la serrure fonctionnelle de C .

C.6. Dans la suite, on appellera k -clique toute clique associée à k serrures.

- a) Expliquer pourquoi si $f - 1 \leq b < 2(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$.
Tant qu'il reste des 2-cliques dans $E(f; b - 1)$, $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 2$ car on remplace une 2-clique par une 3-clique en ajoutant 2 essais. Or $E(f; f - 2)$ comporte $f - 1$ essais sans serrure en commun et est ainsi l'union disjointe de $f - 1$ cliques à deux serrures. On peut donc faire le remplacement indiqué $f - 1$ fois, soit de $b = f - 1$ jusqu'à $b = f - 1 + f - 2 = 2(f - 1) - 1$. On a bien le résultat demandé.
- b) Expliquer pourquoi si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.
Si $2(f - 1) \leq b < 3(f - 1)$ alors les cliques de $E(f; b)$ sont des 3-cliques ou des 4-cliques, et il reste au moins une 3-clique, donc $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + 3$.
- c) Démontrer que si $q(f - 1) \leq b < (q + 1)(f - 1)$ alors $|E(f; b)| = |E(f; b - 1)| + q + 1$.
 $E(f; q(f - 1) - 1)$ est constitué de $f - 1$ $(q + 1)$ -cliques donc les $f - 1$ constructions suivantes transforment une $(q + 1)$ -clique en $(q + 2)$ -clique jusqu'à $E(f; (q + 1)(f - 1) - 1)$ qui ne contient que des $(q + 2)$ -cliques — toujours au nombre de $f - 1$.
- d) En déduire que si $b = q(f - 1) - 1$ avec $q \geq 1$ alors :

$$|E(f; b)| = (f - 1)(1 + 2 + 3 + \dots + q)$$

$$\begin{aligned} |E(f; b)| &= |E(f; f - 2)| + \sum_{i=f-1}^b (|E(f; i)| - |E(f; i - 1)|) \\ &= |E(f; f - 2)| + \sum_{k=1}^q \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} (|E(f; i)| - |E(f; i - 1)|) \\ &= |E(f; f - 2)| + \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{i=k(f-1)}^{(k+1)(f-1)-1} (k + 1) \\ &= f - 1 + \sum_{k=1}^{q-1} (f - 1) \times (k + 1) \\ &= (f - 1) \sum_{k=1}^q k \end{aligned}$$

Complément : deux tableaux révélateurs

$E(f; b)$ en fonction de f et b (en rouge les essais ajoutés) :

	$b = 0$	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$	$b = 5$	$b = 6$	$b = 7$
$f = 2$						K_7	K_8	K_9
$f = 3$								
$f = 4$								
$f = 5$								
$f = 6$								
$f = 7$								

	$b = 8$	$b = 9$	$b = 10$	$b = 11$	$b = 12$
$f = 2$	K_{10}	K_{11}	K_{12}	K_{13}	K_{14}
$f = 3$			K_7	$K_7 K_7$	$K_8 K_7$
$f = 4$					
$f = 5$					
$f = 6$					
$f = 7$					

$O(f; b)$ en fonction de f et b :

	$b = 0$	$b = 1$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 4$	$b = 5$	$b = 6$	$b = 7$	$b = 8$	$b = 9$	$b = 10$	$b = 11$	$b = 12$	$b = 13$	$b = 14$	$b = 15$
$f = 2$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136
$f = 3$	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	72
$f = 4$	1	2	3	5	7	9	12	15	18	22	26	30	35	40	45	51
$f = 5$	1	2	3	4	6	8	10	12	15	18	21	24	28	32	36	40
$f = 6$	1	2	3	4	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	34
$f = 7$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	14	16	18	21	24	27	30
$f = 8$	1	2	3	4	5	6	7	9	11	13	15	17	19	21	24	27
$f = 9$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$f = 10$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	13	15	17	19	21	23
$f = 11$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	22
$f = 12$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	15	17	19	21
$f = 13$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	16	18	20
$f = 14$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	17	19
$f = 15$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18

Complément : $O(f; b) = |E(f; b)| = \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (q+1)(r+1)$

Supposons $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$.

Démontrons que $|E(f; b)| = \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (q+1)(r+1)$

$$\begin{aligned}
|E(f; b)| &= |E(f; q(f-1) - 1)| + \sum_{i=q(f-1)}^b (|E(f; i)| - |E(f; i-1)|) \\
&= (f-1) \sum_{k=1}^q k + \sum_{i=q(f-1)}^b (q+1) \\
&= (f-1) \times \frac{q(q+1)}{2} + (b - q(f-1) + 1)(q+1) \\
&= \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (r+1)(q+1)
\end{aligned}$$

Rappelons que si $b' \geq b$, toute restriction d'un ensemble $E' (f; b')$ -certain à $f+b$ serrures forme un ensemble $E (f; b)$ -certain. En effet, toute $(f; b)$ -configuration de ces $f+b$ serrures peut être étendue en une $(f; b')$ -configuration en ajoutant uniquement des serrures bloquantes, et pour cette configuration étendue E' doit comporter un essai réussi qui est donc nécessairement un essai de E .

Démontrons maintenant que $O(f; b) = |E(f; b)|$ pour tout $b \geq f-2$. Fixons $f \geq 2$ et notons $\mathcal{P}(b)$ la propriété plus forte suivante :

- $O(f; b) = |E(f; b)|$
- Tout ensemble $(f; b)$ -certain comporte au moins une serrure testée au moins $q+1$ fois, où $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$.

Le point crucial de cette démonstration est que la construction de $E(f; b+1)$ qui consiste à compléter la plus petite clique possible est la meilleure possible : tout ensemble certain contiendra au moins une serrure testée autant de fois que dans $E(f; b+1)$ et donc on doit avoir ajouté au moins ce nombre d'essais pour construire un ensemble $(f; b+1)$ -certain optimal à partir d'un ensemble $(f; b)$ -certain.

Démontrons $\mathcal{P}(b)$ pour tout $b \geq f-2$ par récurrence. Si $b = f-2$, on a déjà démontré $O(f; b) = b+1 = |E(f; b)|$, et bien entendu un ensemble certain n'est pas vide et comporte au moins une serrure testée au moins une fois.

Soit $b \geq f-2$. Démontrons $\mathcal{P}(b) \implies \mathcal{P}(b+1)$. Notons $b = q(f-1) + r$ avec $0 \leq r < f-1$ et supposons $\mathcal{P}(b)$.

Tout ensemble $E' (f; b+1)$ -certain peut être restreint en un ensemble $E_1 (f; b)$ -certain, et la serrure testée au moins $q+1$ fois par E_1 le sera au moins autant par E' . Mais alors la restriction E_2 aux autres serrures est $(f; b)$ -certain avec $|E'| \geq |E_2| + q+1 \geq O(f; b) + q+1$.

Si $r < f-2$ alors $b+1 = q(f-1) + (r+1)$ est la division euclidienne de $b+1$ par $f-1$, et la remarque précédente suffit à démontrer $\mathcal{P}(b+1)$ puisque $O(f; b+1) \leq |E(f; b+1)| = |E(f; b)| + q+1 = O(f; b) + q+1$ en appliquant $\mathcal{P}(b)$.

Si $r = f-2$ et E' est un ensemble $(f; b+1)$ -certain, alors on note n_s le nombre d'essais de E' testant la serrure s et $N = \max_s(n_s)$. Puisque la division euclidienne de $b+1$ par $f-1$

est $b + 1 = (q + 1)(f - 1)$, le deuxième point de $\mathcal{P}(b + 1)$ correspond à $N \geq q + 2$. Démontrons le :

L'addition de tous les n_s compte deux fois chaque essai, donc $N(f + b + 1) = \sum_s N \geq \sum_s n_s = 2|E'|$.

Comme vu précédemment, E' comporte au moins une serrure testée au moins $q + 1$ fois et En définitive $|E'| \geq O(f; b) + q + 1 \geq \frac{q(q+1)(f-1)}{2} + (r + 1)(q + 1) + q + 1$.

En remplaçant, on obtient $N(f + b + 1) \geq q(q + 1)(f - 1) + 2(f - 1)(q + 1) + 2(q + 1) = (q + 1)((q + 2)(f - 1) + 2) \geq (q + 1)((q + 2)(f - 1) + 1)$.

Or $f + b + 1 = (q + 2)(f - 1) + 1$ donc l'inégalité devient $N((q + 2)(f - 1) + 1) > (q + 1)((q + 2)(f - 1) + 1)$ ce qui donne $N > q + 1$ en divisant par $(q + 2)(f - 1) + 1$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Enfin, puisqu'il existe une serrure testée $q + 2$ fois par E' , alors sa restriction aux autres serrures est $(f; b)$ -certain ce qui permet d'affirmer que $O(f; b + 1) = |E'| \geq O(f; b) + q + 2$ en prenant E' optimal.

L'autre inégalité $O(f; b + 1) \leq |E(f; b + 1)| = |E(f; b)| + q + 2 = O(f; b) + q + 2$ vient en appliquant $\mathcal{P}(b)$.

On peut remarquer que $O(2; n - 2)$ est la somme des n premiers entiers, que $n \mapsto O(4; n - 4)$ est la suite <https://oeis.org/A130518>, $n \mapsto O(5; n - 5)$ est la suite <https://oeis.org/A130519>, $n \mapsto O(6; n - 6)$ est la suite <https://oeis.org/A130520>, et que plus généralement $O(f; b) = a(b - f, 1, f - 1)$ où a est la suite <https://oeis.org/A214734>.