

## **Exercice 1 : Un problème d'aire qui ne manque pas d'air !**

Dans un carré  $ABCD$  de côté 1, on considère une suite de cercles  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  de centres respectifs  $(O_0, O_1, \dots, O_n)$  et de rayons respectifs  $(r_0, r_1, \dots, r_n)$ , où  $n$  est un nombre entier naturel (voir figure 1).

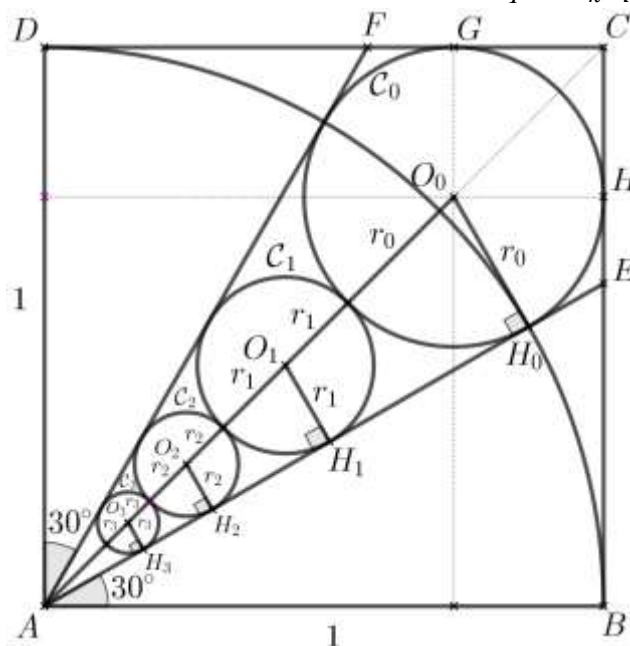
Les cercles  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  sont :

- tangents entre eux.
- tangents aux segments  $[AE]$  et  $[AF]$ .

Le quart de cercle de centre  $A$  et de rayon 1 coupe le segment  $[AE]$  en  $H_0$ .

On définit  $A_n$  comme la **somme** des aires des disques délimités par les cercles  $(C_0, C_1, \dots, C_n)$  où  $n$  est un nombre entier naturel.

Le problème consiste à calculer la **somme**  $A$  des aires de tous les disques  $C_k$ , pour  $k \geq 0$ .

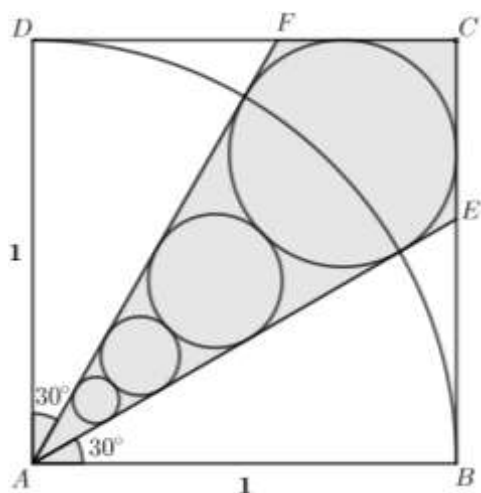


**Figure 1 – Représentation géométrique partielle du problème**

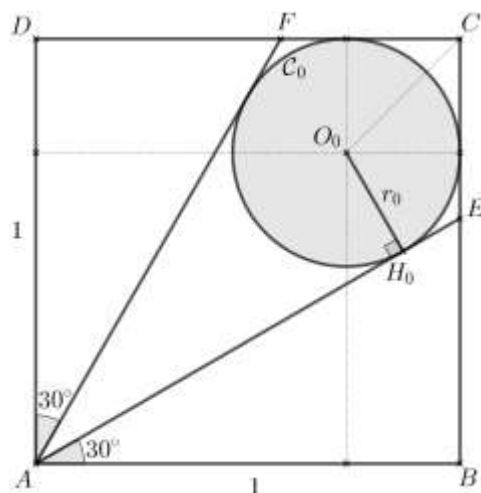
### **Partie A – Ne dépassons pas les bornes !**

L'objectif de cette partie est de donner un encadrement de l'aire  $A$ , comprise entre celle du disque délimité par le cercle  $C_0$ , désignée par  $A_{min}$  et celle de la zone  $AECF$ , désignée par  $A_{max}$  :

$$A_{min} \leq A \leq A_{max}.$$



**Figure 2 – Majorant :  $A_{max} = A_{AECF}$**



**Figure 3 – Minorant :  $A_{min} = A_{C_0}$**

## A.1 – Recherche d'un majorant :

A.1.1 Montrer que :  $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

On rappelle que :  $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  où  $\alpha$  est la mesure d'un angle d'un triangle rectangle.

Dans le triangle  $ABE$  rectangle en  $B$ :  $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2} = \frac{BE}{AE}$  et  $\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{AE}$ , ainsi :

$$\tan(30) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{BE}{\frac{BE}{1} \times \frac{AE}{AB}}$$

D'où le résultat :  $BE = \frac{\sqrt{3}}{3}$

A.1.2 Calculer l'aire des triangles  $ABE$  et  $ADF$ .

Les triangles  $ABE$  et  $ADF$  sont égaux et ont donc la même aire :

$$A_{ADF} = A_{ABE} = \frac{AB \times BE}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

A.1.3 En déduire la valeur exacte de l'aire  $A_{max}$  de la zone  $AECF$  puis la valeur approchée par excès au centième.

L'aire recherchée correspond à la différence entre l'aire du carré  $ABCD$  et la somme des aires des deux triangles  $ABE$  et  $ADF$ , ainsi :

$$A_{max} = A_{ABCD} - (A_{ABE} + A_{ADF})$$

$$A_{max} = 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$A_{max} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,4226 \dots \approx 0,43$$

## A.2 – Recherche d'un minorant :

A.2.1 Calculer la longueur  $AC$  en considérant le carré  $ABCD$ . En déduire que :

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2}$$

Dans le triangle  $ABC$  rectangle en  $C$ , on utilise le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = 1^2 + 1^2$$

$$AC^2 = 2$$

$$AC = \sqrt{2} \approx 1,42$$

Comme  $0 \leq r_0 \leq AC$ , on a  $0 \leq r_0 \leq \sqrt{2}$

**A.2.2** Déterminer  $O_0C$  en fonction de  $r_0$ , puis en déduire  $AO_0$  en fonction de  $r_0$ .

On rappelle que  $H_0$  est le point d'intersection entre le segment  $[AE]$  et le quart de cercle de centre  $A$  et de rayon 1.

**Dans le triangle  $O_0CH$  rectangle en  $H$ , en utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :**

$$O_0C = r_0\sqrt{2}$$

**D'où**

$$AO_0 = AC - O_0C$$

$$AO_0 = \sqrt{2} - r_0\sqrt{2}$$

$$AO_0 = \sqrt{2}(1 - r_0)$$

**A.2.3** En considérant le triangle  $AH_0O_0$  rectangle en  $H_0$ , montrer que  $r_0$  vérifie :

$$r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$$

**Dans le triangle  $AH_0O_0$  rectangle en  $H_0$ , on utilise le théorème de Pythagore :**

$$AH_0^2 + O_0H_0^2 = AO_0^2$$

$$1^2 + r_0^2 = 2(1 - r_0)^2$$

$$1 + r_0^2 = 2 - 4r_0 + 2r_0^2$$

**Ainsi  $r_0$  vérifie :**

$$r_0^2 - 4r_0 + 1 = 0$$

**A.2.4** Résoudre l'équation précédente et montrer que  $r_0 = 2 - \sqrt{3}$ .

**L'équation précédente est de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , avec  $a = 1$ ;  $b = -4$ ;  $c = 1$**

**On calcule le discriminant de cette équation :  $\Delta = b^2 - 4ac$  :**

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} > 0$$

**On obtient deux racines distinctes réelles :**

$$r_0' = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73$$

**D'après la question A.2.1 on sait que :**

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2} \approx 1,41$$

**$r_0' > \sqrt{2}$ , il n'est donc pas solution.**

**Ainsi  $r_0 = r_0'' = 2 - \sqrt{3}$ .**

$$r_0'' = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26$$

**D'après la question A.2.1 on sait que :**

$$0 \leq r_0 \leq \sqrt{2} \approx 1,41$$

$$0 < r_0'' < \sqrt{2}$$

**A.2.5** En déduire la valeur exacte de l'aire  $A_{min}$  du disque délimité par le cercle  $C_0$  puis une valeur approchée par défaut au centième.

$$A_{min} = \pi \cdot r_0^2 = \pi \cdot (2 - \sqrt{3})^2 = \pi \cdot (7 - 4\sqrt{3}) = 0,2255 \dots \approx 0,22$$

**A.3** À l'aide de ce qui précède, donner un encadrement de la somme des aires des disques, les valeurs seront données au centième.

$$A_{min} \leq A \leq A_{max}$$

**On obtient ainsi, l'encadrement de la somme de toutes les aires  $A$  :**

$$0,22 < A < 0,43$$

**REMARQUES :**

**0,22** obtenu avec la question A.2.5 en prenant une valeur approchée par défaut

**0,43** obtenu avec la question A.1.3 en prenant une valeur approchée par excès

**Les valeurs 0.23 et 0.42 ne sont pas acceptables car l'une trop majorée et l'autre trop minorée.**

## Partie B – Des rayons bien rangés et bien alignés !

Dans cette partie, on s'intéressera à la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des rayons des cercles  $C_n, n \in \mathbb{N}$  formant l'hypoténuse du triangle  $AH_0O_0$  rectangle en  $H_0$ .

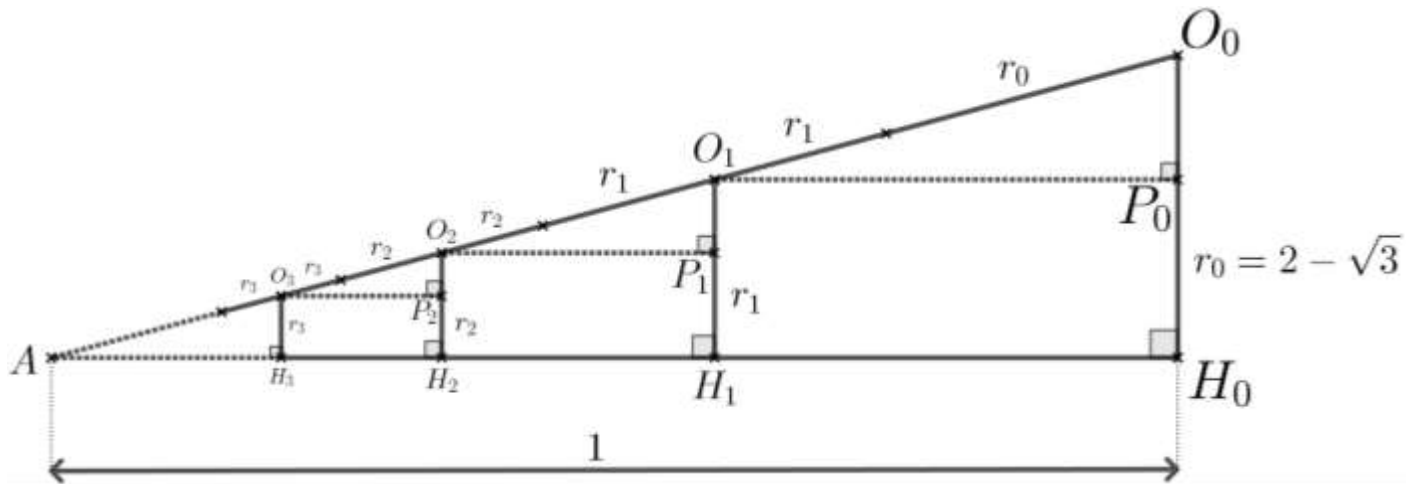


Figure 4 – Suite de triangles

**B.1** En s'aidant du résultat de la question A.2.2, montrer que  $AO_0 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$ .

**D'après A.2.2 on a**  $AO_0 = \sqrt{2}(1 - r_0)$  **et**  $r_0 = 2 - \sqrt{3}$ , **ainsi :**

$$AO_0 = \sqrt{2}(1 - 2 + \sqrt{3})$$

**D'où le résultat :**

$$AO_0 = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}$$

**B.2** En remarquant que  $AO_1 = AO_0 - O_1O_0$  montrer que  $\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ .

En déduire une valeur arrondie à  $10^{-4}$  près du rapport  $\frac{r_1}{r_0}$ .

**Sur le segment  $[AO_0]$ , on a :**

$$\begin{aligned} AO_1 &= AO_0 - O_1O_0 \\ AO_1 &= AO_0 - (r_0 + r_1) \\ AO_1 &= (\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} - (2 - \sqrt{3} + r_1) \\ AO_1 &= -2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1 \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} \frac{H_1O_1}{H_0O_0} &= \frac{AO_1}{AO_0} \\ \frac{r_1}{r_0} &= \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}} \end{aligned}$$

**On utilise l'égalité des produits en croix :**

$$r_1(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - r_1)$$

**On distribue  $r_0$  :**

$$r_1(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) - r_0 \cdot r_1$$

**On factorise par  $r_1$  :**

$$r_1((\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} + r_0) = r_0(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

**On substitue la valeur de  $r_0$  dans l'égalité :**

$$r_1((\sqrt{3} - 1)\sqrt{2} + 2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

$$r_1(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}) = (2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$

**D'où**

$$r_1 = \frac{(2 - \sqrt{3})(-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})}{(2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})} = 54 + 38\sqrt{2} - 31\sqrt{3} - 22\sqrt{6}$$

**Du résultat précédent on peut déduire que :**

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}{2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}} = 15 + 10\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 6\sqrt{6}$$

$$\frac{r_1}{r_0} \approx 0,5888$$

**B.3** Justifier que les triangles  $O_i O_{i+1} P_i$  sont semblables, pour  $0 \leq i \leq n$ .

**Les angles des triangles  $O_i O_{i+1} P_i$  sont deux à deux égaux, donc les triangles sont semblables.**

**B.4** Exprimer les longueurs des segments  $[O_i P_i]$  en fonction de  $r_i$  et  $r_{i+1}$ .

$$O_i P_i = r_i - r_{i+1}$$

Les triangles  $O_i O_{i+1} P_i$  étant semblables, on a l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{O_i O_{i+1}}{O_i P_i} = \frac{O_{i+1} O_{i+2}}{O_{i+1} P_{i+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

**B.5** En déduire les relations suivantes :

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_2}{r_3} = \dots = \frac{r_i}{r_{i+1}} = \dots = \frac{r_{n-1}}{r_n} = \frac{r_n}{r_{n+1}}, \text{ pour } 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$$

**Pour les triangles semblables  $O_i O_{i+1} P_i$  et  $O_{i+1} O_{i+2} P_{i+1}$  l'égalité des rapports de longueurs peut s'écrire :**

$$\frac{r_i + r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}} = \frac{r_{i+1} + r_{i+2}}{r_{i+1} - r_{i+2}}$$

**Ou encore :**

$$(r_i + r_{i+1}) \cdot (r_{i+1} - r_{i+2}) = (r_{i+1} + r_{i+2}) \cdot (r_i - r_{i+1})$$

**En distribuant on obtient :**

$$r_i r_{i+1} - r_i r_{i+2} + r_{i+1}^2 - r_{i+1} r_{i+2} = r_i r_{i+1} - r_{i+1}^2 + r_i r_{i+2} - r_{i+1} r_{i+2}$$

**En simplifiant, on obtient :**

$$r_{i+1}^2 = r_i r_{i+2}$$

**D'où**

$$\frac{r_i}{r_{i+1}} = \frac{r_{i+1}}{r_{i+2}}$$

**Par récurrence sur  $N$ , on obtiendrait les relations proposées.**

**B.6** À l'aide de l'égalité précédente, montrer qu'il existe un  $q$  réel tel que :

$$r_{n+1} = q \times r_n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

On rappelle que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r_n$  est le rayon du cercle  $C_n$ . On a ainsi établi que la suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique.

**L'égalité B.6, on a :**  $\frac{r_0}{r_1} = \frac{r_i}{r_{i+1}}$ , pour  $0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$  (idée de récurrence descendante)

**Qui peut s'écrire :**  $r_{i+1} = \frac{r_1}{r_0} \times r_i$

**En posant :**  $q = \frac{r_1}{r_0}$  (existence et expression de  $q$ )

**Ainsi, d'après la question B.3.2 ,  $q$  est bien un nombre réel, et on peut écrire :**

$$r_{n+1} = q \times r_n, \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

**B.7** En utilisant la question **B.6** , **B.2** et une valeur arrondie au dix-millième de  $r_2$  , construire les cercles  $C_1$  et  $C_2$  sur la figure de l'annexe. Sur cette figure, une unité est représenté par 10 cm.

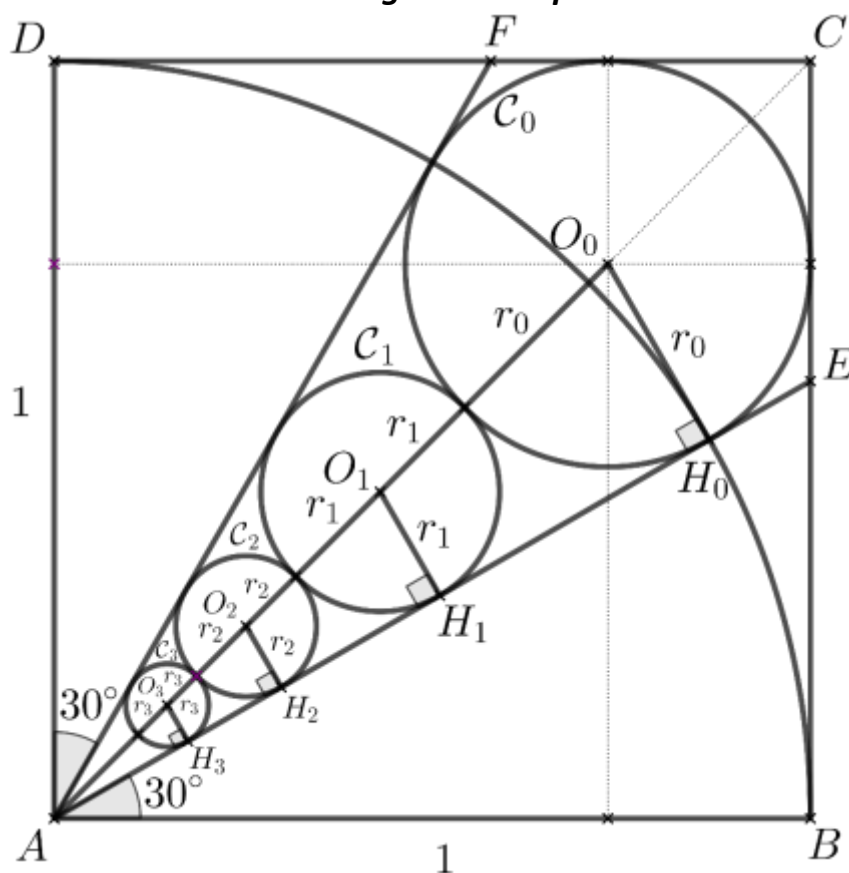
**D'après B.2 ou B.6 on a**  $r_1 = q \times r_0 \approx 0,1578$ , **ainsi  $C_1$  est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon 1,6 cm.**

**D'après B.6 , on a :**  $r_2 = q \times r_1$ , **puis en remplaçant  $n$  par 2 et  $q$  par 0,5888 , on obtient :**

$$r_2 \approx 0,5888 \times 0,1578 \approx 0,09291$$

**Ainsi  $C_2$  est représenté à l'échelle 10 par un cercle de rayon 0,9 cm.**

**Annexe : Figure à compléter**



**B.8** On pose  $u_n = \pi(r_n)^2, n \in N$ , montrer que  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $q^2$ .

**D'après B.6**, la suite  $(r_n)_{n \in N}$  des rayons des cercles  $C_n, n \in N$  est géométrique, son terme général s'exprime :

$$r_n = r_0 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n$$

Exprimons le terme général au carré :

$$(r_n)^2 = (r_0)^2 \times \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n}$$

Cette suite de rayon au carré est aussi géométrique, de raison constante égale à  $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2$ .

**B.9** Expliquer pourquoi la **somme**  $A$  des aires de tous les disques  $C_k$ , pour  $k \geq 0$  vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de  $A$  à  $10^{-2}$  près .

On rappelle pour cette question que pour une suite géométrique  $(u_n)_{n \in N}$ , la somme  $S_n$  des  $(n + 1)$  premiers termes vaut :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On peut en déduire la somme de ses termes :

$$\pi \times (r_0)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n+2}}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

Pour des grandes valeurs de  $n$  on peut négliger le terme :  $\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{2n+2}$ , car :

$$q = \frac{r_1}{r_0} \approx 0,5887 < 1$$

Ainsi, cette somme de termes peut s'écrire :

$$\frac{(r_0)^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

On peut en déduire que la somme des aires  $A$  de tous les disques vaut :

$$A = \pi \times \frac{r_0^2}{1 - \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2}$$

En déduire une valeur arrondie de  $A$  à  $10^{-2}$  près .

$$A \approx \pi \times \frac{0,2679^2}{1 - (0,5887)^2} \approx 0,35$$

Ce résultat est cohérent car d'après A.3 :  $0,22 < A < 0,43$