Eléments de corrigé – Olympiades de Quatrième (session 2020)

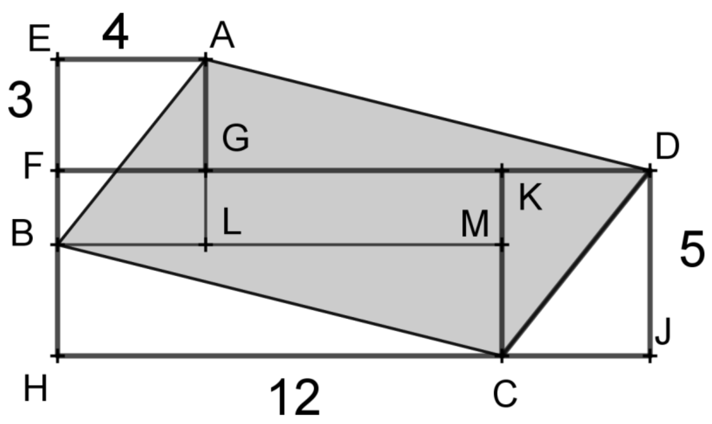
Exercice 1 Confiserie

Dressons un tableau des achats possibles des 19 clients :

Client n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Caramels																			
Chocolats																			
Macarons																			

Ce tableau satisfait les hypothèses du problème : aucun client n'a acheté les trois produits, 17 ont acheté des caramels, 13 des chocolats et 8 des macarons (on remarque qu'ils ont tous acheté deux produits).
Une autre distribution est-elle possible ? Si, des deux clients qui n'ont pas acheté de caramels, un seul achète des macarons, il reste 17 cases sur deux lignes pour en colorier 13 + 6 (ou 11 + 8) …

Exercice 2 Des aires



La parallèle à (CH) passant par B coupe la droite (AG) en L et la droite (CK) en M. Les triangles AEB et DKC sont rectangles, leurs côtés sont parallèles deux à deux et leurs hypoténuses ont la même longueur (par hypothèse, ABCD est un parallélogramme), donc ils ont tous leurs angles deux à deux de même mesure et leurs côtés deux à deux de même longueur.
Il s'ensuit que le parallélogramme peut être découpé en quatre triangles (CKD, BEA, AGD et CMB) et un rectangle (GLKM). L'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme s'écrit donc :

$$\mathcal{A} = 4 \times 5 + 12 \times 3 + 2 \times 8 = 72$$

(dans ce dernier calcul, on a considéré la somme des aires de deux triangles identiques comme l'aire d'un rectangle).

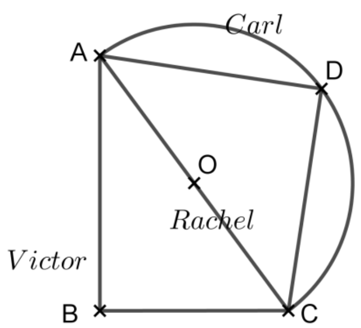
Exercice 3 Dodécachaîne

1. On vérifie que 348 est un multiple de 12 : $348 = 29 \times 12$. Mais 488 n'en est pas un : $488 = 40 \times 12 + 8$. La suite $3 - 2 - 8 - 8 - 8$ n'est donc pas une dodécachaîne.
2. *a.* Le nombre $21a$ devant être un multiple de 12, il est multiple de 4, donc pair, son chiffre des unités est pair.
b. Le nombre $21a$ doit être un multiple de 3, la somme de ses chiffres doit aussi être un multiple de 3. Comme cette somme est $3 + a$, a doit aussi être un multiple de 3.
c. Ces deux conditions nécessaires conduisent aux possibilités $a = 0$ et $a = 6$, mais seul le nombre 216 est un multiple de 12. Donc $a = 6$.
d. On cherche donc le chiffre b tel que le nombre $16b$ soit un multiple de 12. Le seul multiple de 12 compris entre 160 et 169 est 168. Donc $b = 8$.
3. Comme 360 est un multiple de 12, il n'y a aucun autre multiple de 12 compris entre 350 et 359.
4. On cherche si une suite $a - b - 4 - c - d$ qui soit une dodécachaîne.
Observons le nombre $b4c$. Pour que ce soit un multiple de 12, il est nécessaire que le nombre $4c$ soit un multiple de 4. Cela laisse trois possibilités : $c = 0, c = 4$ et $c = 8$. Seuls 408 et 444 sont des multiples de 12.
Pour que le nombre $b40$ soit un multiple de 12, il est nécessaire que $b = 2$ ou $b = 5$ ou $b = 8$.
Pour que le nombre $b44$ soit un multiple de 12, il est nécessaire que $b = 1$ ou $b = 4$ ou $b = 7$.
Il nous reste à examiner les nombres $a24, a54, a84, a14, a44$ et $a74$. On élimine immédiatement $a54, a14$ et $a74$, car $54, 14$ et 74 ne sont pas des multiples de 4.
On trouve que $024, 324, 624, 924, 084, 384, 684, 984, 144, 444$ et 744 conviennent.

Voici finalement la liste des solutions (l*a question consistait à trouver une solution. Elles ne sont pas toutes demandées*)
02408 32408 62408 92408
14444 44444 74444
26480 56480 86480
08408 38408 68408 98408

5. Après 888, la seule possibilité est 888, la suite ne contient que des 8.

Exercice 4 Une course entre amis



1. La longueur du trajet A – B – C est 350 m. Pour le parcourir à la vitesse moyenne de 15 km/h, Victor met $t = \frac{d}{v} = \frac{0,35}{15} = 0,02333$ ...h.
Cette durée est exprimée en heures décimales.
Cela donne exactement 84 s.
La distance de A à C peut être calculée en appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABC rectangle en A.
On a $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2$, ce qui donne AC = 250 m
Pour parcourir 250 m à la vitesse moyenne de 12 km/h, Rachel met :

$$t' = \frac{d'}{v'} = \frac{0,25}{12} = 0,0208333 \dots h$$

Cette durée est exprimée en heures décimales. Convertie en secondes, c'est 75 s. Rachel parvient donc au but avant Victor.
2. Carl doit parcourir un demi-cercle de rayon 125 m. Son parcours mesure donc $L = 0,125 \times \pi$. Si Carl parvient en C avant Rachel, en courant à la vitesse v'', son temps de parcours $t'' = \frac{0,125\times\pi}{v''}$ est inférieur à $\frac{0,25}{12}$. Cette condition s'écrit :$v'' \geq \frac{0,125\times\pi\times12}{0,25}$, ce qui donne $v'' \geq 18,85$ en arrondissant au centième.
3. Carl parcourt un quart du cercle. La durée de son parcours est : $T = \frac{0,125\times\pi}{2\times17}$.
Victor parcourt le segment [AD], côté d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse de longueur 0,250 km. La durée du parcours de Victor est donc $T' = \frac{0,25}{\sqrt{2}\times15}$
Les durées des parcours, exprimées en seconde et arrondies au dixième sont 41,6 pour Carl et 42,4 pour Victor. Carl arrive le premier.