

Éléments de corrigé – Olympiades de Quatrième (session 2019)

Exercice 1 :

1) Pour 77, on obtient 49 puis 36 puis 18 puis 8. La persistance de 77 est donc 4.

Pour 28 534, on obtient 960 puis 0. La persistance de 28 534 est donc 2.

Pour 6 785 791, on obtient 105840 puis 0. La persistance de 6 785 791 est donc 2.

2) Conjecture : si au moins des chiffres du nombre est 0, alors la persistance est 1.

Démonstration : en faisant le produit des chiffres, on obtient 0. Il n'y a donc qu'une seule étape.

3) Si on ajoute 1 dans le nombre, cela ne change pas le produit de ses chiffres. Le nombre d'étapes reste alors inchangé. Cela ne change donc pas la persistance.

4) Précédemment, nous avons vu que la persistance de 77 est 4. Ainsi, le nombre constitué de 2 chiffres 7 et 18 chiffres 1 (quel que soit l'ordre de ses chiffres) a une persistance de 4.

Bien évidemment, d'autres exemples sont possibles.

5) Pour un nombre dont l'écriture comporte un chiffre pair et un 5, deux cas sont possibles :

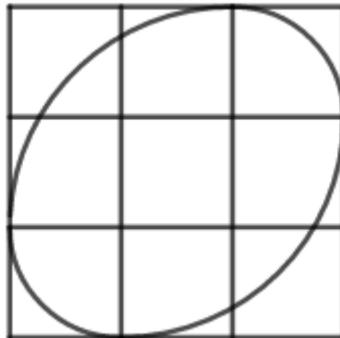
Le nombre contient un 0 auquel cas sa persistance est 1.

Sinon, l'issue de la première étape donnera un nombre dont le chiffre des unités sera 0 car il sera alors un multiple de 10. L'étape suivante donnera donc 0. La persistance d'un tel nombre sera donc de 2.

Exercice 2 :

1) L'ovale est constitué de 4 cercle : un cercle de centre O et de rayon 2, un cercle de centre M et de rayon 2, un cercle de centre P et de rayon 1 et un cercle de centre N et de rayon 1.

2) Voici la figure :

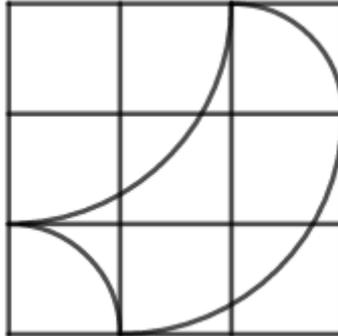


3) Le périmètre est $2 \times \frac{2\pi}{4} + 2 \times \frac{4\pi}{4} = 3\pi$ unités.

4) L'aire est $2 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} + 2 \times \frac{\pi \times 2^2}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi - 1 = \frac{5\pi}{2} - 1 \approx 6,85$ unités d'aire.

5) On construit sur la figure initiale le symétrique de l'arc \widehat{ZU} par rapport à la droite (ZU) . On efface l'arc \widehat{ZU} et on obtient une figure de même périmètre et d'aire plus petite.

6) Sur la figure initiale (cf question 2), on effectue la symétrie axiale de l'arc \widehat{ZU} par rapport à la droite (ZU) et la symétrie axiale de l'arc \widehat{ZW} par rapport à la droite (ZW) .



Le périmètre n'a pas changé. L'aire est de 4 unités d'aire (la démonstration rigoureuse est possible mais on s'en convainc facilement en regardant les compensations).

Exercice 3 :

1) On calcule $S = 35 + 3 \times 25 = 110$. Ainsi, la clé C est égale à 0. Le code est donc valide.

2) On calcule $S = 31 + 3 \times 24 = 103$. Ainsi, la clé C est égale à 7.

3) On calcule $S = 31 + 3 \times (11 + x) = 64 + 3x$. En testant les valeurs, on obtient $x = 3$.

4) Cherchons x et y pour le code $xy42278085958$ soit valide.

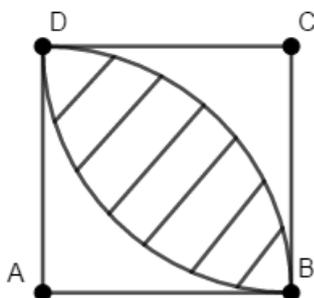
On calcule $S = 88 + x + 3y$

Pour chaque valeur de y , cherchons la (ou les) valeur(s) de x (si elle existe).

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	4	1	8	5	2	9	6	3	0	7

Ainsi, on peut remplacer les 2 premiers chiffres (37) par 40 ; 11 ; 82 ; 53 ; 24 ; 95 ; 66 ; 08 ; 79.

Exercice 4 :



Calculons tout d'abord l'aire de la surface hachurée ci-contre, inscrit dans le carré ABCD de côté 1.

Les deux « coins » en bas à gauche et en haut à droite mesurent chacun $1 - \frac{\pi}{4}$.

Ainsi, l'aire hachurée mesure $1 - 2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

La figure est composée de trois demi-disques (dont l'aire est $3 \times \frac{\pi}{2}$) et de trois disques complets (dont l'aire est $3 \times \pi$) auxquels ont été soustraits six fois l'aire hachurée (dont l'aire est $6 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$).

Ainsi l'aire totale est $3 \times \frac{\pi}{2} + 3\pi - 6 \times \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 6 + \frac{3\pi}{2}$.