Eléments de corrections des Olympiades de 4ème – Session 2018

Exercice 1 :

1) On constate que la décimale numéro $3k+1$ (avec k entier) est 0, la décimale numéro $3k+2$ (avec k entier) est 3, la décimale numéro $3k+3$ (avec k entier) est 7.
Comme $52 = 17 \times 3 + 1$ est de la forme $3k+1$, on en déduit que **la 52ème décimale est $\mathbf{0}$.**
2) La période est composée de 6 chiffres (4615384).
Comme $100 = 16 \times 6 + 4$ est de la forme $6k+4$, on en déduit que **la 100ème décimale est $\mathbf{5}$.**
3) La période est composée de 3 chiffres (074), avec un décalage au début.
On constate que la décimale numéro $3k+2$ (avec k entier supérieur ou égal à 1) est 0, la décimale numéro $3k+3$ (avec k entier supérieur ou égal à 1) est 7, la décimale numéro $3k+4$ (avec k entier supérieur ou égal à 1) est 4.
Comme $1000 = 332 \times 3 + 4$ est de la forme $3k+4$, on en déduit que **la 1000ème décimale est $\mathbf{4}$.**
4) On peut obtenir la période sous forme de nombre entier en calculant $p = \frac{1}{97} \times 10^{96} - \frac{1}{97}$
On a alors $\underbrace{10^{96} - 1}_{\text{termine par un 9}} = 97 \times p$
Le chiffre des unités de la période p multiplié par 7 vaut donc 9. On regarde la table de 7, le seul multiple qui finit par un 9 est 49, donc **le chiffre des unités de $\boldsymbol{p}$ est un 7**.

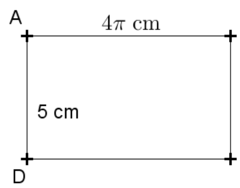
Exercice 2 :

Parmi les 2019 codes possibles, le premier chiffre peut prendre la valeur 0, 1 ou 2. Parmi les nombres dont le nombre des milliers est 0, on peut en dénombrer $9 \times 8 \times 7$. Parmi les nombres dont le nombre des milliers est 1, on peut en dénombrer $9 \times 8 \times 7$. Parmi les nombres dont le nombre des milliers est 2, on peut en dénombrer 6. Au total, on compte **1014 codes**.
On remarque que le nombre formé par les chiffres des centaines et des milliers ne peut être que pair et entre 00 et 20. Les différents codes possibles seraient 0402 ou 0804 ou 1005 ou 1407.
Comme les quatre chiffres doivent être différents, on élimine les trois premiers et **le bon code est donc 1407**.

Exercice 3 :

A l'aide du théorème de Thalès (ou théorème des milieux), on peut prouver sur les « points » sur la droite centrale sont séparés de 2 cm. De la même manière, on peut prouver sur les « points » sur la droite du haut sont séparés de 4 cm. Ainsi, l'aire grisée est l'aire du grand trapèze à laquelle on soustrait les 4 triangles blancs du haut, soit $\frac{(4+16)\times 10}{2} - 4 \times \frac{4\times 5}{2} = 100 - 40 = \boxed{\mathbf{60\ cm^2}}$

Exercice 4 :



1) La fourmi 1 parcourt $\sqrt{5^2+4^2} + 2 = \sqrt{41} + 2 \approx 8{,}4$
La fourmi 2 parcourt $1 + \pi \times 1{,}5 \approx 5{,}7$
La fourmi 2 a donc parcouru le chemin le plus court.
2) a. On se place sur le patron du cylindre : la fourmi 2 parcourt deux fois la diagonale, donc une distance $d = 2 \times \sqrt{5^2 + (4\pi)^2} = 2\sqrt{25 + 16\pi^2} \approx 27{,}05$
Pendant ce temps la fourmi 1 parcourt la même distance, qui n'est pas un multiple de 4π,
Donc la fourmi 1 ne rencontrera pas la fourmi 2 lors de son premier retour.

b. Au bout de k aller-retours, la fourmi 2 aura parcouru la distance $d = k \times 2\sqrt{25+16\pi^2}$
La fourmi 1 aura parcouru la même distance. On cherche si c'est un multiple de 4π :
On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $k \times 2\sqrt{25+16\pi^2} = 4\pi n$ ou encore $\pi^2 = \frac{25k^2}{4n^2 - 16k^2}$ ce qui est impossible car π^2 est irrationnel.