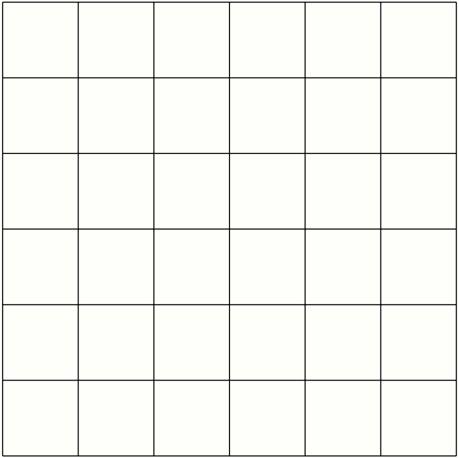
Carrelage et mariage font parfois bon ménage

Aline Parreau

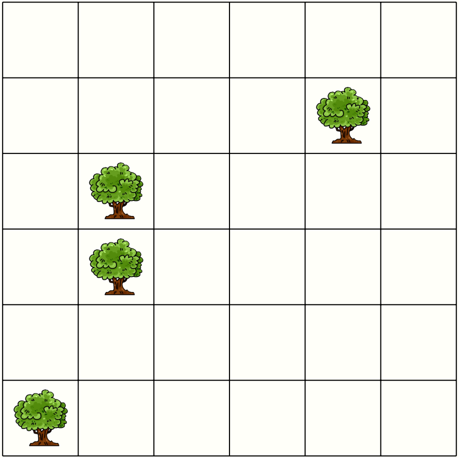
CNRS - LIRIS - Université Lyon 1

Remise des prix des olympiades
Lyon, le 5 juin 2019

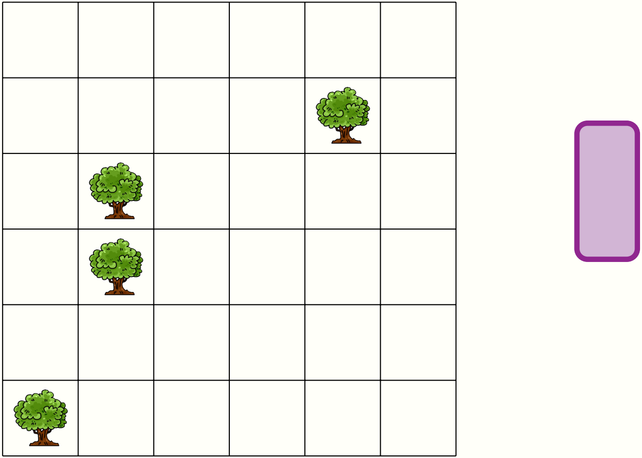
Un problème de carrelage



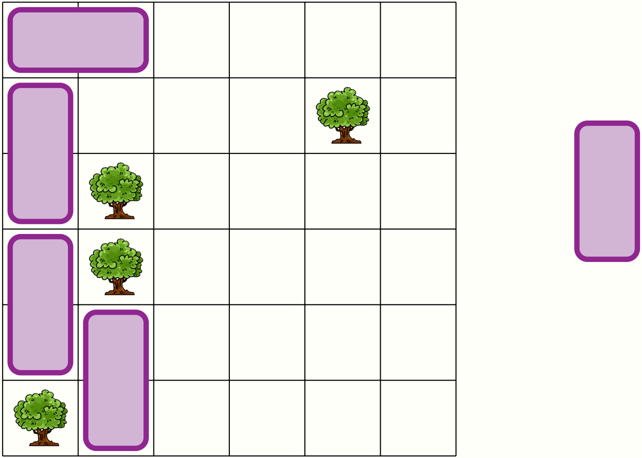
Un problème de carrelage



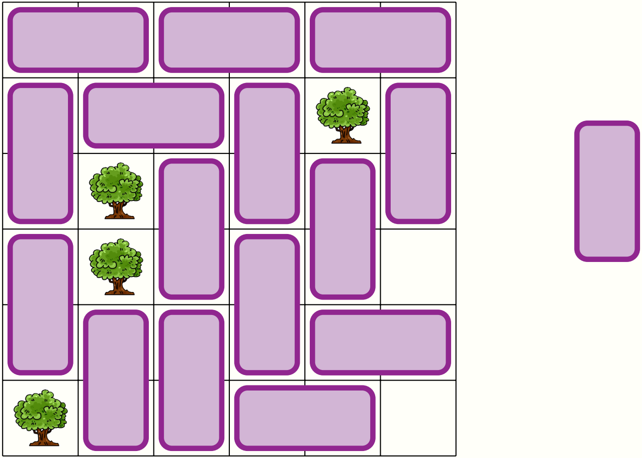
Un problème de carrelage



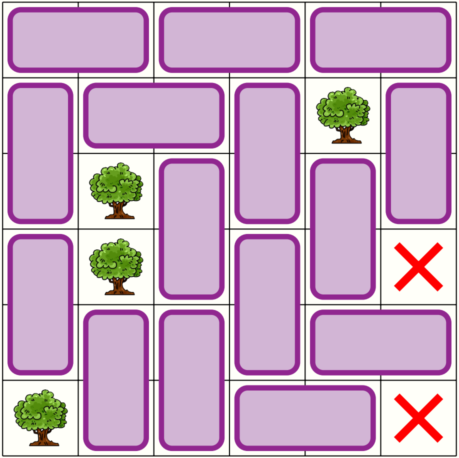
Un problème de carrelage

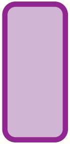


Un problème de carrelage

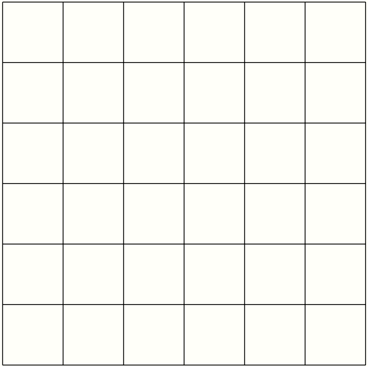


Un problème de carrelage

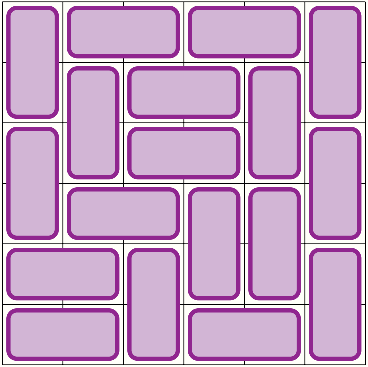




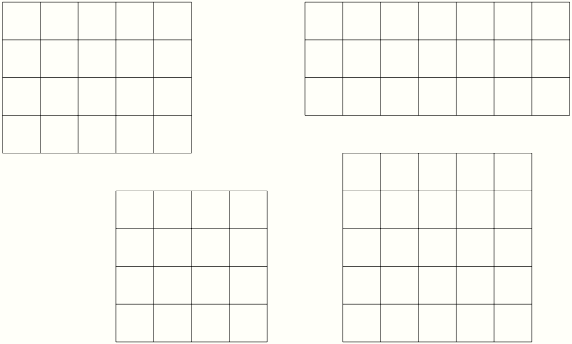
Commençons sans arbre



Commençons sans arbre

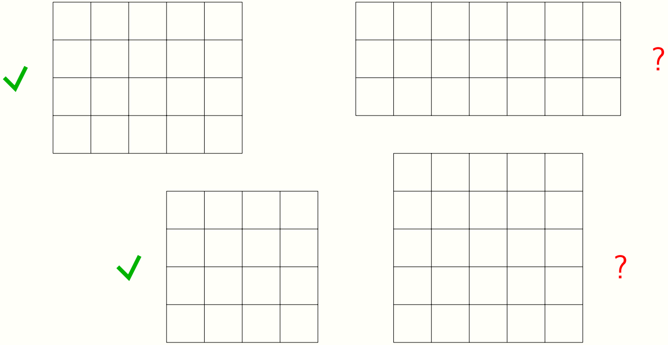


Commençons sans arbre

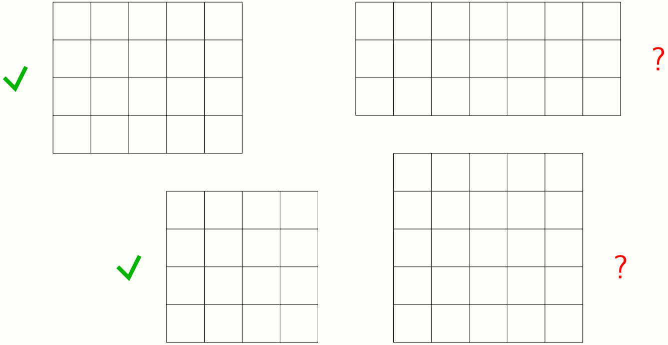


À vous de jouer !

Commençons sans arbre

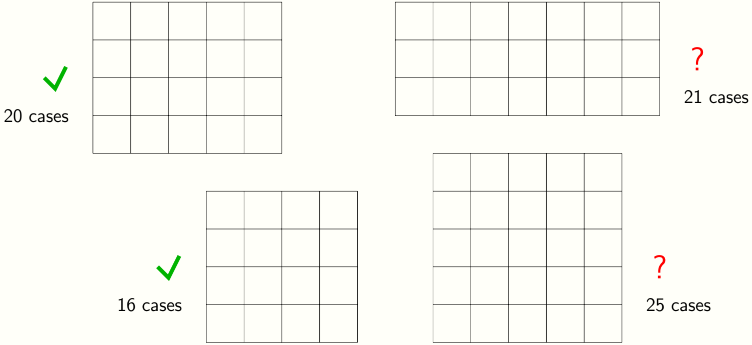


Commençons sans arbre



Combien de cases ?

Commençons sans arbre



Combien de cases ?

Résolution sans arbre

Résultat

On peut paver une grille sans arbre si et seulement si elle a un nombre pair de cases.

Résolution sans arbre

Résultat

On peut paver une grille sans arbre si et seulement si elle a un nombre pair de cases.

Démonstration :

- Condition nécéssaire : Un domino occupe deux cases. Si on peut paver, c'est qu'il y a un nombre pair de cases.

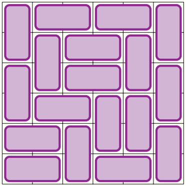
Résolution sans arbre

Résultat

On peut paver une grille sans arbre si et seulement si elle a un nombre pair de cases.

Démonstration :

- Condition nécéssaire : Un domino occupe deux cases. Si on peut paver, c'est qu'il y a un nombre pair de cases.
- Condition suffisante : Il faut donner une méthode générale pour paver toutes les grilles paires.



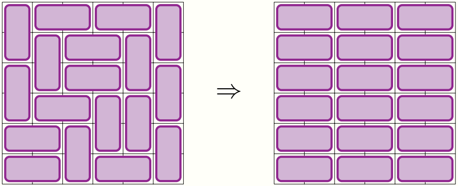
Résolution sans arbre

Résultat

On peut paver une grille sans arbre si et seulement si elle a un nombre pair de cases.

Démonstration :

- Condition nécéssaire : Un domino occupe deux cases. Si on peut paver, c'est qu'il y a un nombre pair de cases.
- Condition suffisante : Il faut donner une méthode générale pour paver toutes les grilles paires.



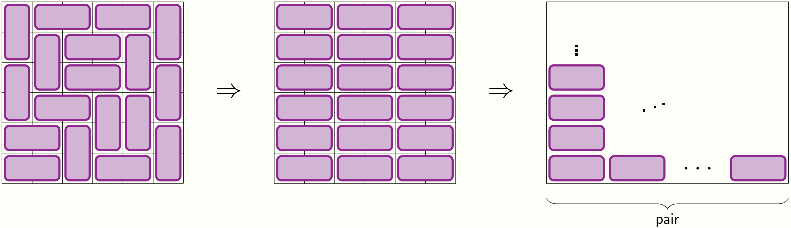
Résolution sans arbre

Résultat

On peut paver une grille sans arbre si et seulement si elle a un nombre pair de cases.

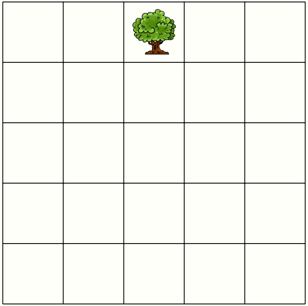
Démonstration :

- Condition nécéssaire : Un domino occupe deux cases. Si on peut paver, c'est qu'il y a un nombre pair de cases.
- Condition suffisante : Il faut donner une méthode générale pour paver toutes les grilles paires.



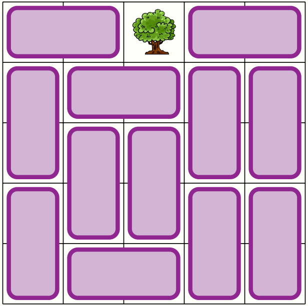
Avec un arbre ?

- Il faut qu'il reste un nombre pair de cases, donc il faut une grille avec un nombre impair de cases au départ.



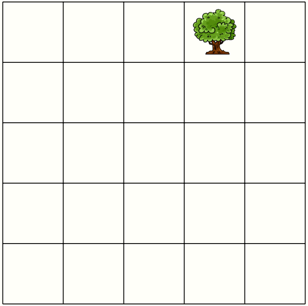
Avec un arbre ?

- Il faut qu'il reste un nombre pair de cases, donc il faut une grille avec un nombre impair de cases au départ.



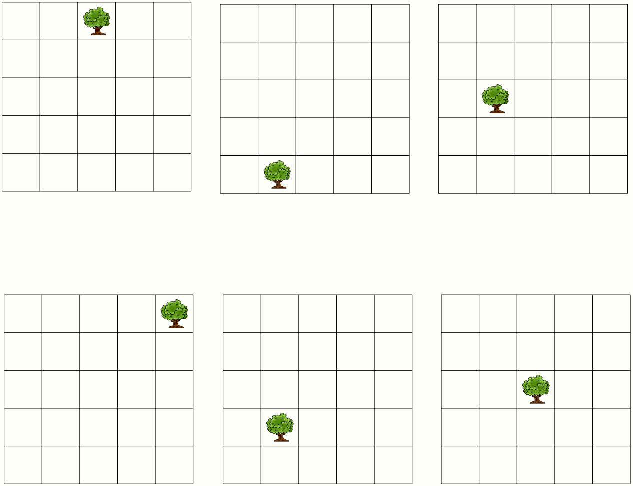
Avec un arbre ?

- Il faut qu'il reste un nombre pair de cases, donc il faut une grille avec un nombre impair de cases au départ.

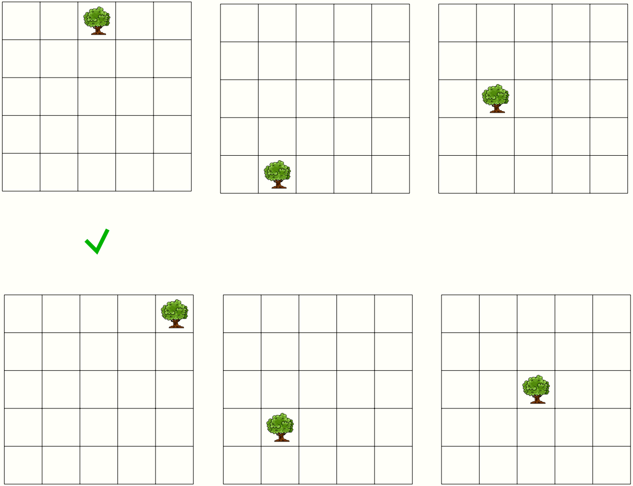


- Peut-on mettre l'arbre partout ?

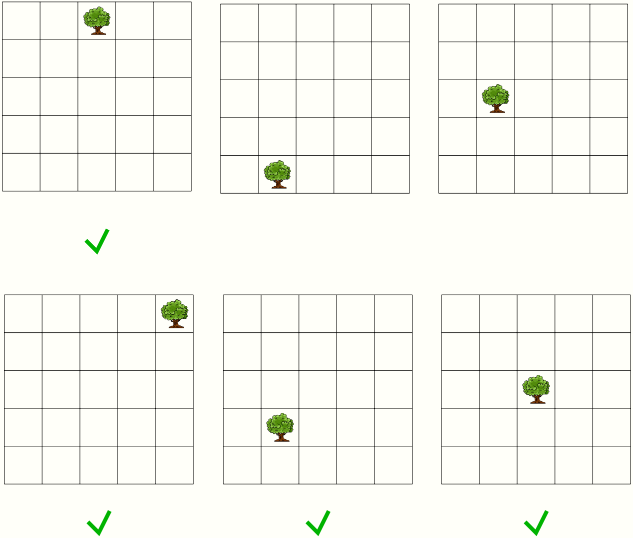
A vous de jouer !



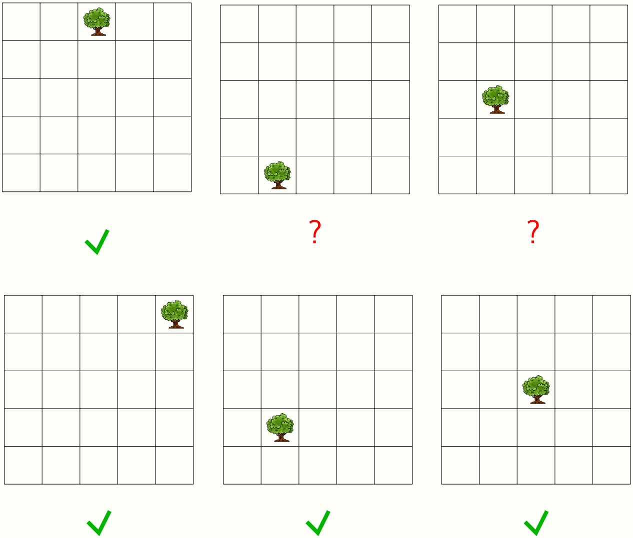
A vous de jouer !



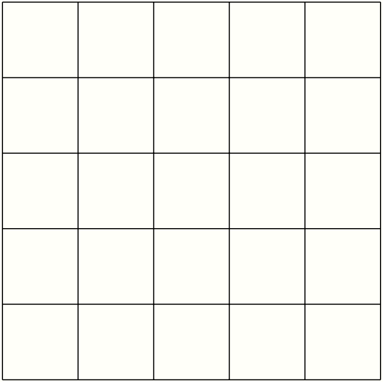
A vous de jouer !



A vous de jouer !



Où peut-on mettre l'arbre ?



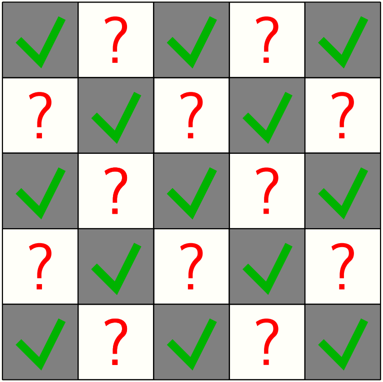
Où peut-on mettre l'arbre ?

		✓		✓
	?	✓		
	✓			
	?			

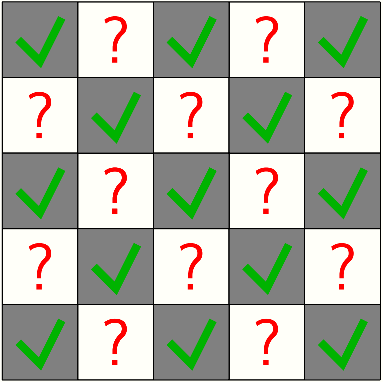
Où peut-on mettre l'arbre ?

✓	?	✓	?	✓
?	✓	?	✓	?
✓	?	✓	?	✓
?	✓	?	✓	?
✓	?	✓	?	✓

Où peut-on mettre l'arbre ?

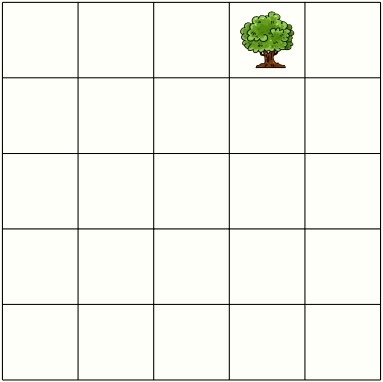


Où peut-on mettre l'arbre ?

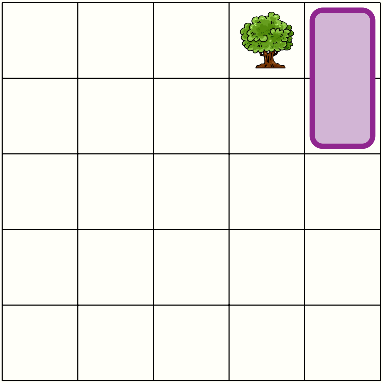


- Résultat : Possible de paver sur une case noire (sur 5×5).
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.

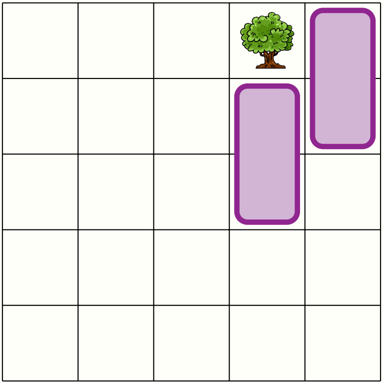
Première méthode : par forçage



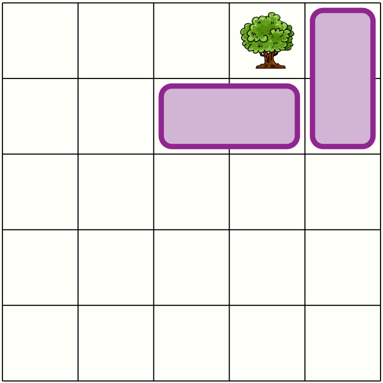
Première méthode : par forçage



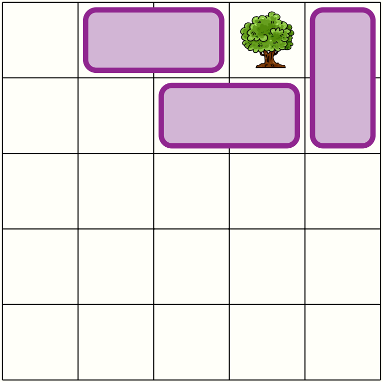
Première méthode : par forçage



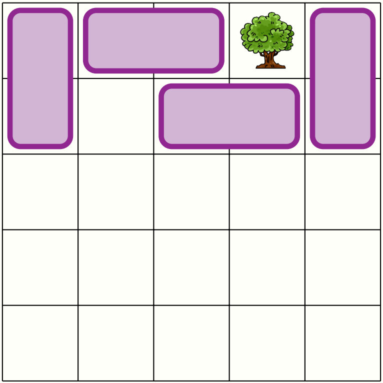
Première méthode : par forçage



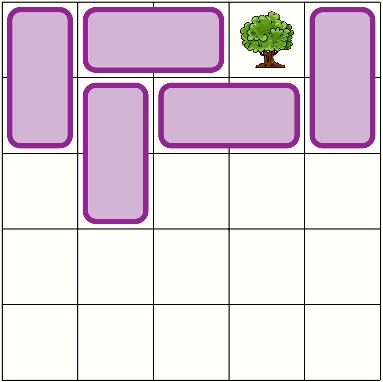
Première méthode : par forçage



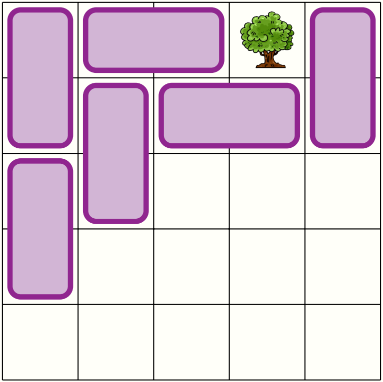
Première méthode : par forçage



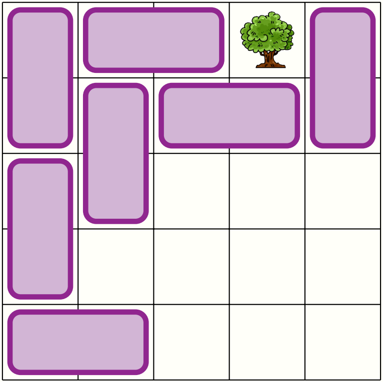
Première méthode : par forçage



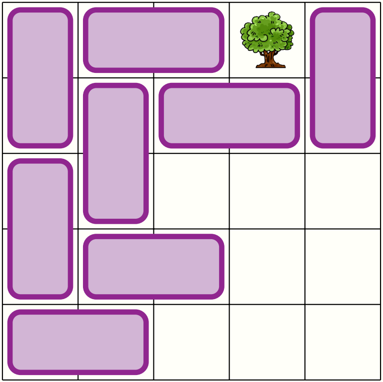
Première méthode : par forçage



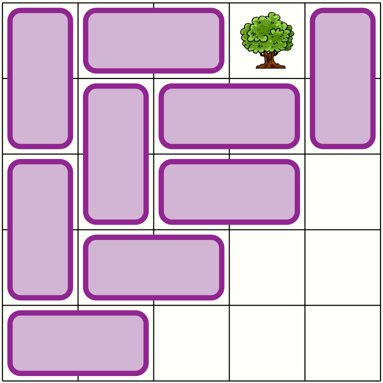
Première méthode : par forçage



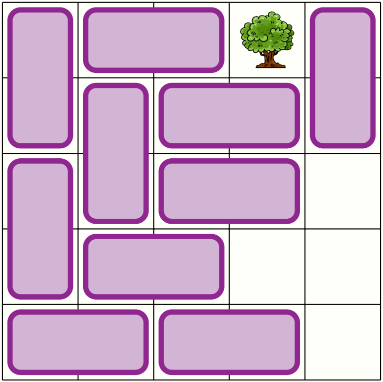
Première méthode : par forçage



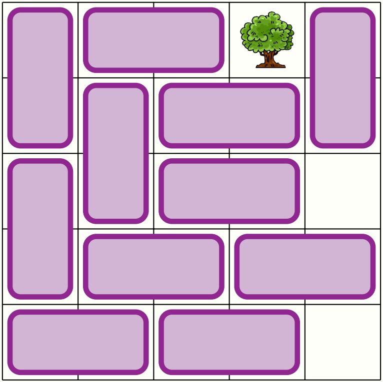
Première méthode : par forçage



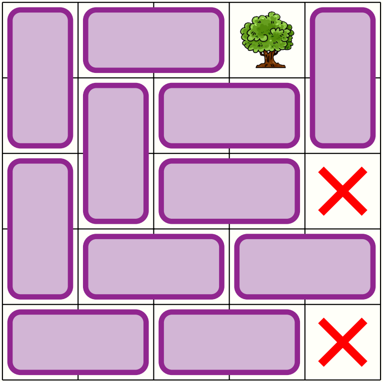
Première méthode : par forçage



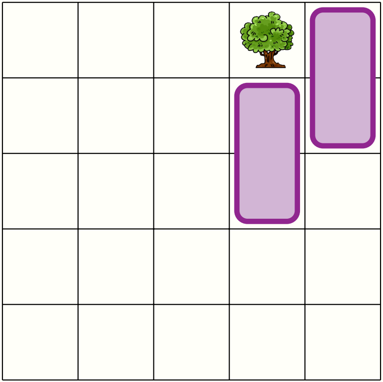
Première méthode : par forçage



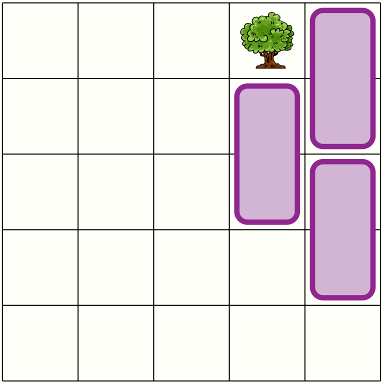
Première méthode : par forçage



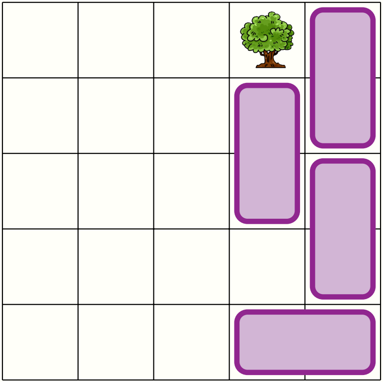
Première méthode : par forçage



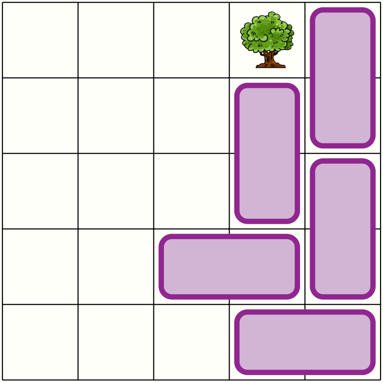
Première méthode : par forçage



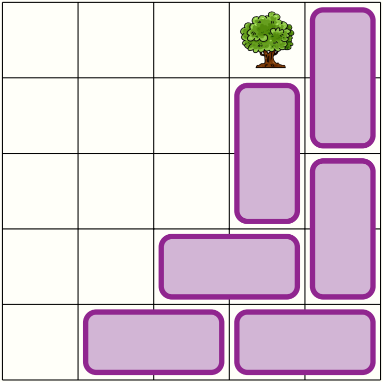
Première méthode : par forçage



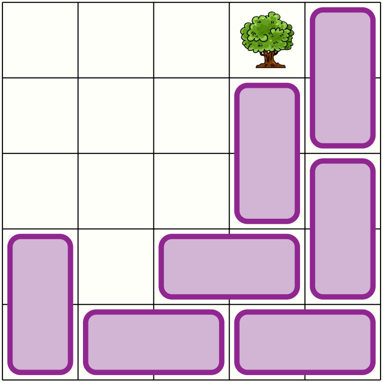
Première méthode : par forçage



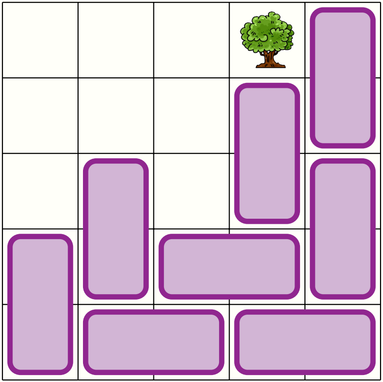
Première méthode : par forçage



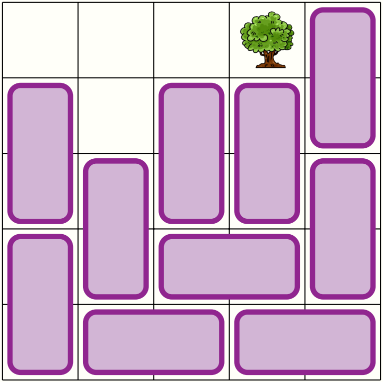
Première méthode : par forçage



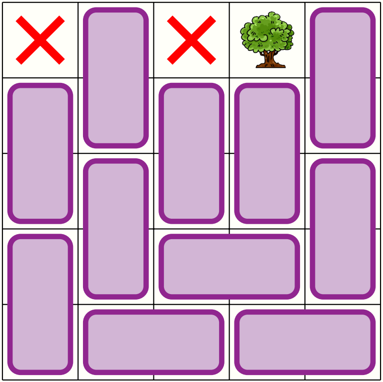
Première méthode : par forçage



Première méthode : par forçage

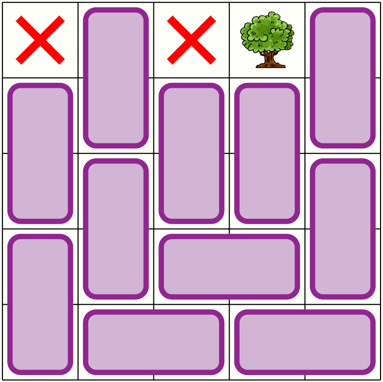


Première méthode : par forçage



On a tout essayé, c'est bien impossible !

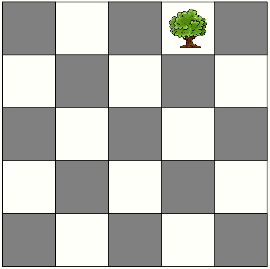
Première méthode : par forçage



On a tout essayé, c'est bien impossible !
... mais un peu laborieux !

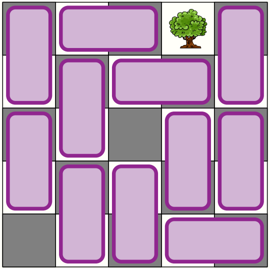
Utilisons le damier

- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



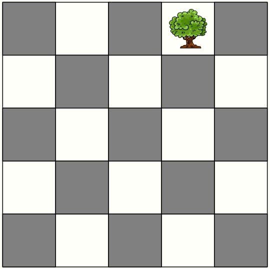
Utilisons le damier

- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



Utilisons le damier

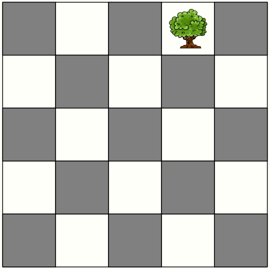
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches

Utilisons le damier

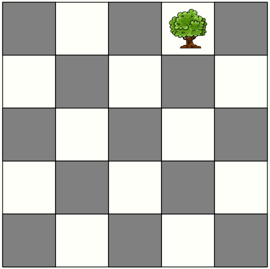
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ?

Utilisons le damier

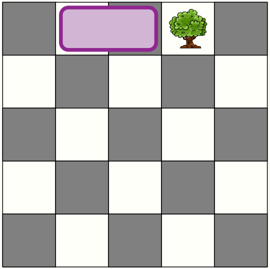
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus

Utilisons le damier

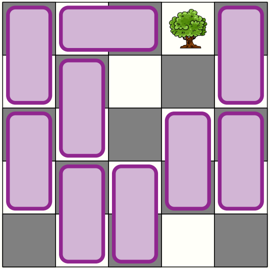
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus
  - Après un domino ?

Utilisons le damier

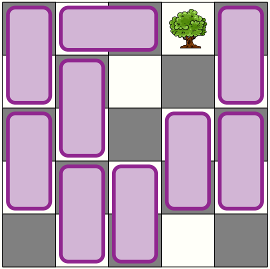
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus
  - Après un domino ? Après 10 dominos ?

Utilisons le damier

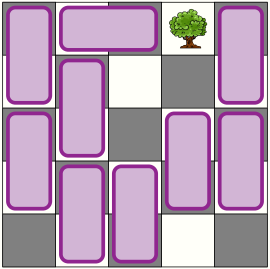
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus
  - Après un domino ? Après 10 dominos ? Deux noires en plus

Utilisons le damier

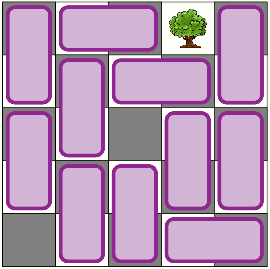
- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus
  - Après un domino ? Après 10 dominos ? Deux noires en plus
  - C'est invariant car un domino occupe une noire et une blanche.

Utilisons le damier

- Conjecture : Impossible de paver sur une case blanche.



- Démonstration : comptons les noires et les blanches
  - Au début ? Deux noires en plus
  - Après un domino ? Après 10 dominos ? Deux noires en plus
  - C'est invariant car un domino occupe une noire et une blanche.
  - A la fin, deux noires restent et on ne peut pas mettre le dernier domino.

Condition de coloration

Résultat

Pour paver, il faut qu'il y ait le même nombre de cases noires et blanches.

Condition de coloration

Résultat

Pour paver, il faut qu'il y ait le même nombre de cases noires et blanches.

- Suffisant quelque soit la grille ?

Condition de coloration

Résultat

Pour paver, il faut qu'il y ait le même nombre de cases noires et blanches. Cela suffit s'il n'y a qu'un arbre.

- Suffisant quelque soit la grille ?
- Oui avec un seul arbre sur une grille rectangulaire

$\rightarrow$ technique du chemin

C'est fini ?

- Résolution complète pour 0 et 1 arbre.

C'est fini ?

- Résolution complète pour 0 et 1 arbre.
- Et avec plus d'arbres ?

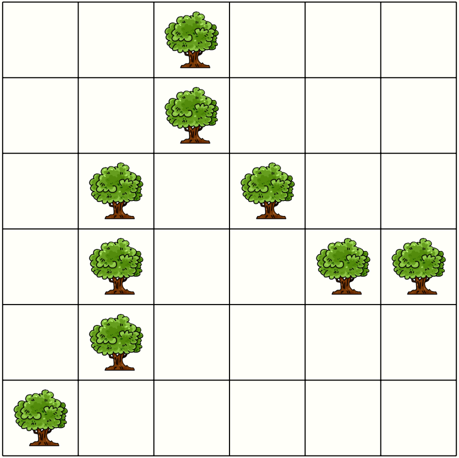
C'est fini ?

- Résolution complète pour 0 et 1 arbre.
- Et avec plus d'arbres ?

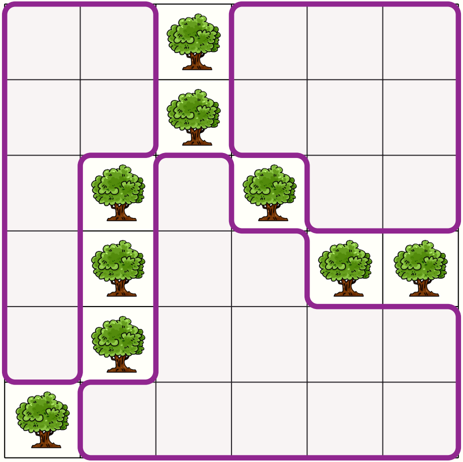
$\rightarrow$ Travaux des élèves du Lycée La Versoie (Thonon les bains, France) et de l'Institut Florimont (Petit Nancy, Suisse)

Ah si j'avais une scie ! *MATh.en.JEANS 2015-2016*

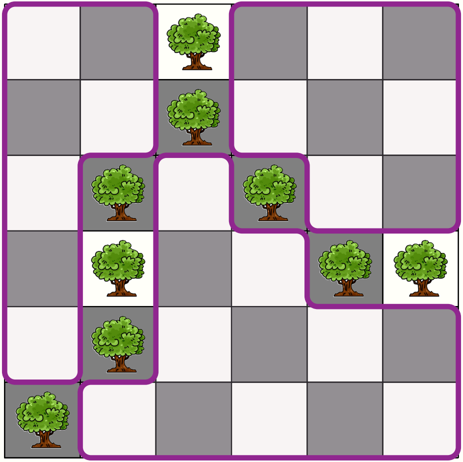
Notion de zone



Notion de zone

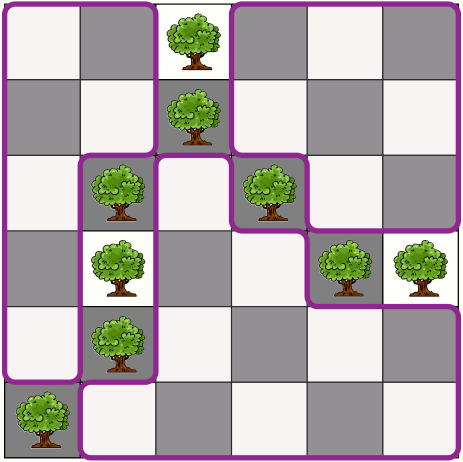


Notion de zone



Condition nécessaire : toutes les zones doivent être paires et avoir le même nombre de cases noires et blanches.

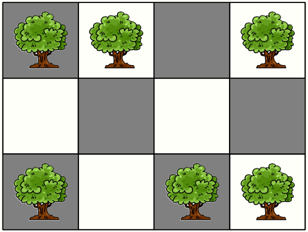
Notion de zone



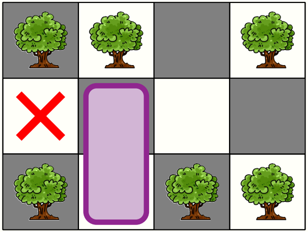
Condition nécessaire : toutes les zones doivent être paires et avoir le même nombre de cases noires et blanches.

Ne suffit pas ! !

La condition de coloration n'est pas suffisante

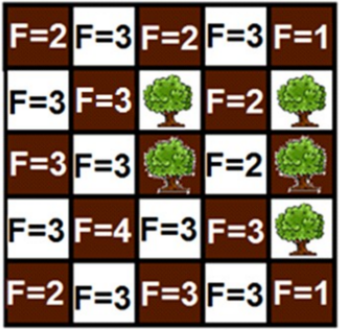


La condition de coloration n'est pas suffisante



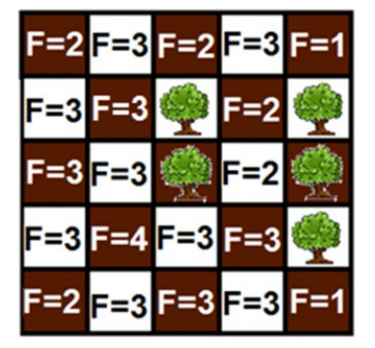
Notion de fuite

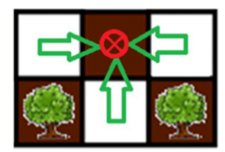
- Fuite d'une case : nombre de voisines libres



Notion de fuite

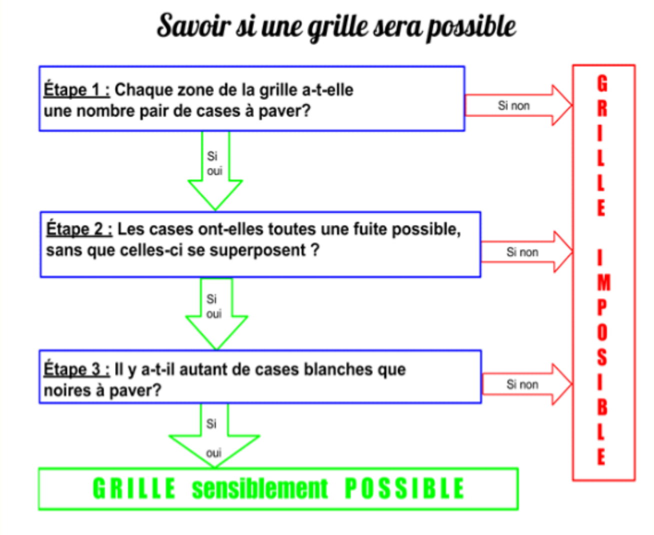
- Fuite d'une case : nombre de voisines libres



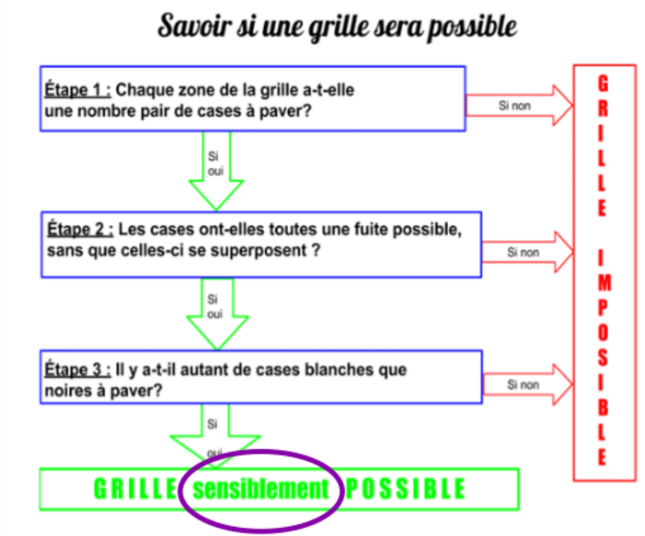


- S'il y a une fuite à 0 : perdu !
- S'il y a une fuite à 1 : force un domino.
- Si des fuites à 1 se chevauchent : perdu !

Un algorithme pour décider si une grille est possible ?

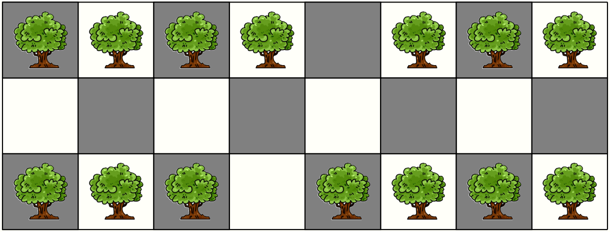


Un algorithme pour décider si une grille est possible ?

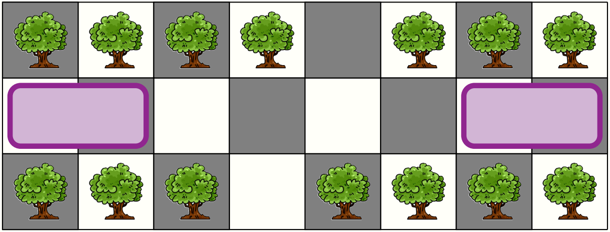


Des fuites peuvent apparaître après forçage de quelques dominos...

Une grille sensiblement possible mais impossible

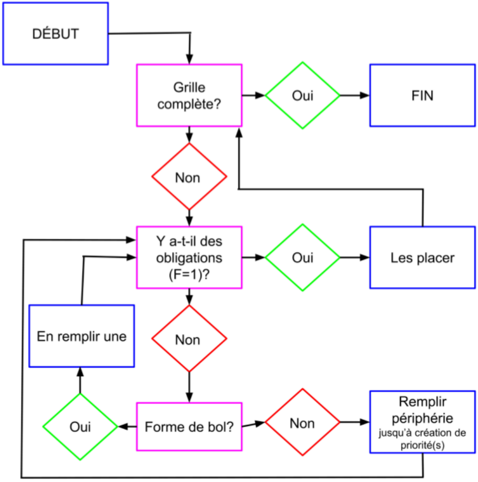


Une grille sensiblement possible mais impossible



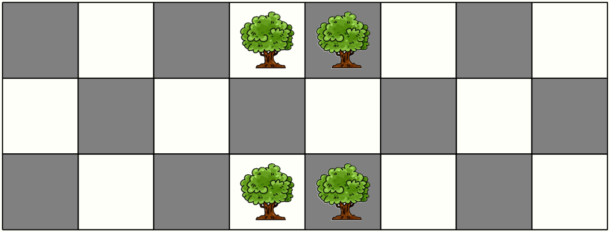
Il faut vérifier les fuites après chaque forçage !

Un algorithme pour paver une grille ?



« *Cet algorithme fonctionne dans tous les cas testés. Malgré tout, une de nos étapes n'a pas été démontrée et son efficacité reste une conjecture forte* »

Une grille à réfléchir...



Parlons mariage maintenant !

Un problème de mariage

Camille cherche à former des couples entre ses copains et copines en respectant leurs affinités :

- Alice aime bien François et Germain
- Barbara aime bien Eric, Hector et Germain
- Caroline aime bien François et Hector et Germain
- Denise aime bien Hector et Eric

Est-ce possible de caser tout le monde ?

Un problème de mariage

Camille cherche à former des couples entre ses copains et copines en respectant leurs affinités :

- Alice aime bien François
- Barbara aime bien Eric, Hector et Germain
- Caroline aime bien François et Hector
- Denise aime bien Hector

Est-ce possible de caser tout le monde ?
Et maintenant ?

Un problème de mariage

Camille cherche à former des couples entre ses copains et copines en respectant leurs affinités :

- Alice aime bien François
- Barbara aime bien Eric, Hector et Germain
- Caroline aime bien François et Hector
- Denise aime bien Hector

Est-ce possible de caser tout le monde ?
Et maintenant ?

Non, car 3 filles (Alice, Caroline et Denise) n'aiment bien que 2 garçons (François et Hector).

Un exemple plus compliqué

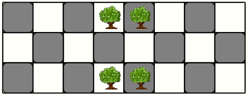
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

x = compatible

Possible, pas possible ? ?

Ces deux problèmes

Carrelage

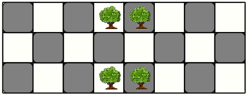


Mariage

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

Ces deux problèmes ... sont les mêmes !

Carrelage



=

Mariage

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

Couplage parfait dans les graphes bipartis

Les graphes

Un graphe c'est :

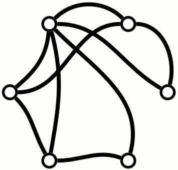
- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

Les graphes

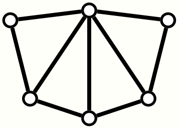
Un graphe c'est :

- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

Exemple :



ou encore

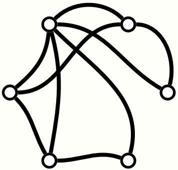


Les graphes

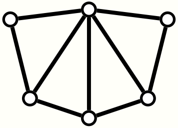
Un graphe c'est :

- Des sommets 
- Des arêtes entre les sommets 

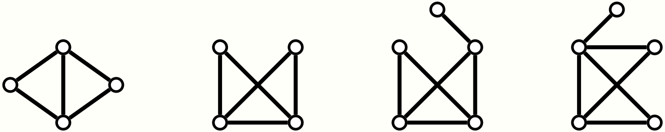
Exemple :



ou encore



Ces graphes sont-ils les mêmes ?



Des graphes cachés partout !

- Dans le métro,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Une question :
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Questions :

Des graphes cachés partout !

- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets :
  - Arêtes :
  - Questions :

Des graphes cachés partout !

- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets : les personnes
  - Arêtes : les amis
  - Questions : trouver les communautés,
    nombre d'amis entre deux personnes

Des graphes cachés partout !

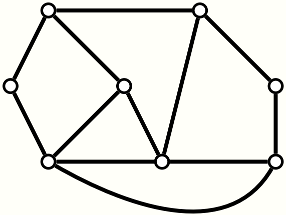
- Dans le métro,
  - Sommets : les stations
  - Arêtes : les lignes de métro
  - Une question : chemin le plus court entre deux stations
- Sur les réseaux sociaux,
  - Sommets : les personnes
  - Arêtes : les amis
  - Questions : trouver les communautés,
    nombre d'amis entre deux personnes
- Dans une ville,
  - Sommets : les carrefours
  - Arêtes : les rues
  - Une question : passer par toutes les rues (tournée du facteur)
- Dans les maisons, les réseaux d'ordinateurs, la théorie des jeux, la cryptographie,...

Lien entre nos deux problèmes

Couplage parfait dans les graphes bipartis

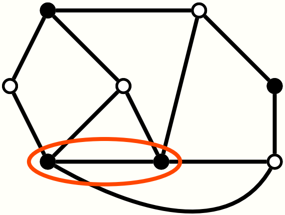
Lien entre nos deux problèmes

Couplage parfait dans les graphes bipartis



Lien entre nos deux problèmes

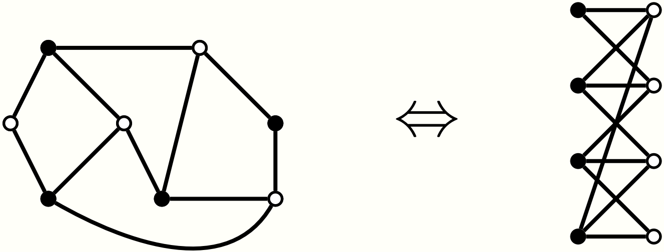
Couplage parfait dans les graphes bipartis



- Aucune arête entre sommets d'une même partie.

Lien entre nos deux problèmes

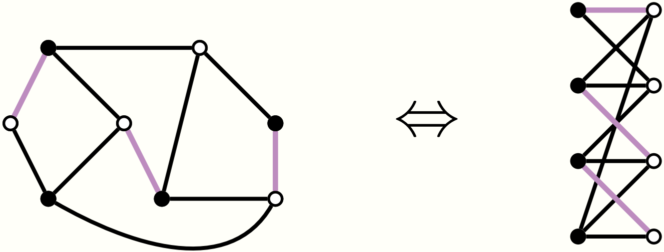
Couplage parfait dans les graphes bipartis



- Aucune arête entre sommets d'une même partie.

Lien entre nos deux problèmes

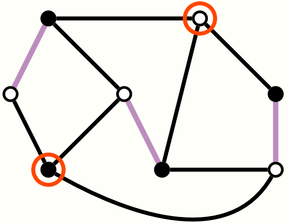
Couplage parfait dans les graphes bipartis



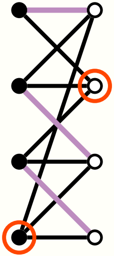
- Aucune arête entre sommets d'une même partie.
- Les arêtes du couplage ne se touchent pas.

Lien entre nos deux problèmes

Couplage parfait dans les graphes bipartis



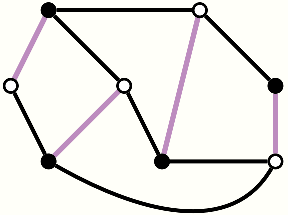
$\Leftrightarrow$



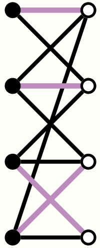
- Aucune arête entre sommets d'une même partie.
- Les arêtes du couplage ne se touchent pas.

Lien entre nos deux problèmes

Couplage parfait dans les graphes bipartis



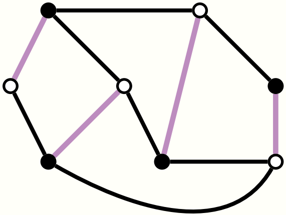
$\Leftrightarrow$



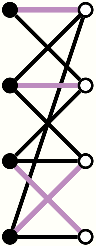
- Aucune arête entre sommets d'une même partie.
- Les arêtes du couplage ne se touchent pas.
- Tous les sommets touchés par une arête du couplage parfait.

Lien entre nos deux problèmes

Couplage parfait dans les graphes bipartis



$\Leftrightarrow$



- Aucune arête entre sommets d'une même partie.
- Les arêtes du couplage ne se touchent pas.
- Tous les sommets touchés par une arête du couplage parfait.

Question

Étant donné un graphe biparti, existe-t-il un couplage parfait ?

Equivalence avec les mariages

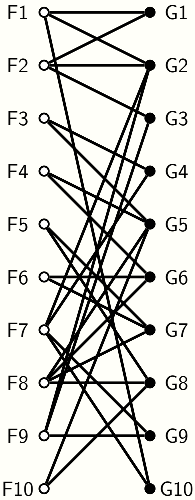
- Sommets : Filles / Garçons

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

Equivalence avec les mariages

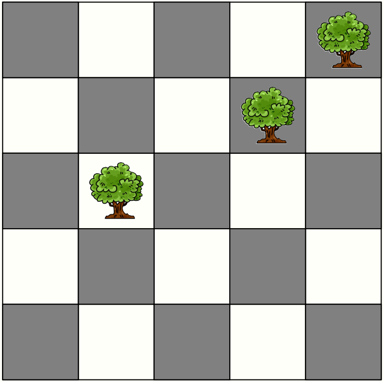
- Sommets : Filles / Garçons
- Arêtes : Compatibilité

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		



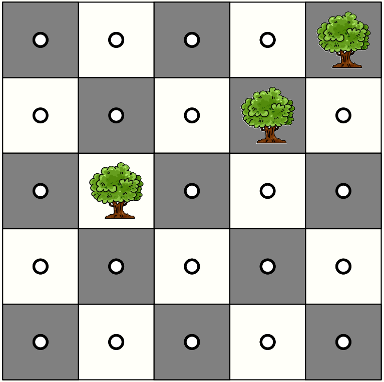
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases



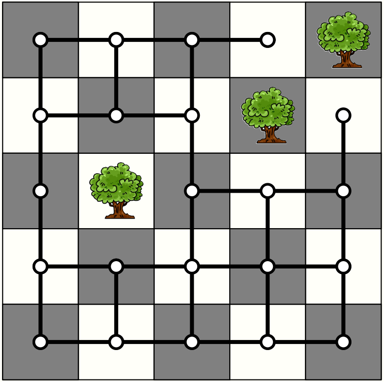
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases



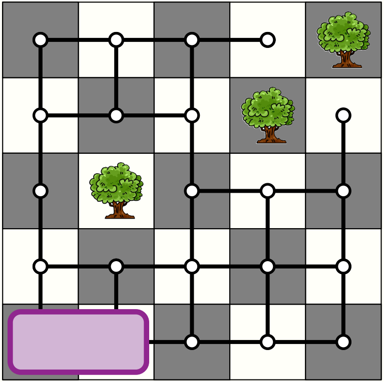
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases
- Arêtes : entre cases adjacentes



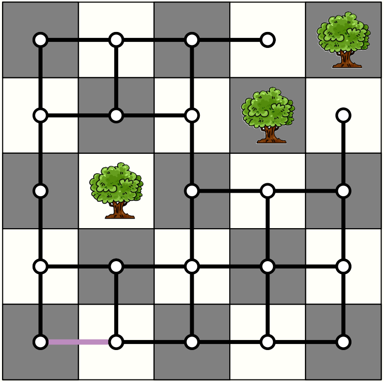
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases
- Arêtes : entre cases adjacentes



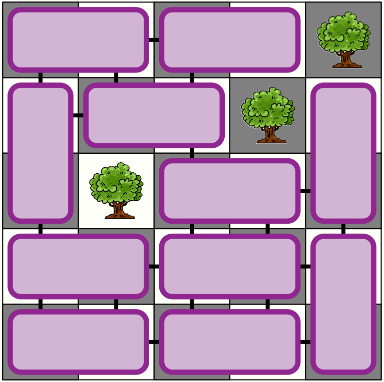
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases
- Arêtes : entre cases adjacentes
- Pavage = Couplage



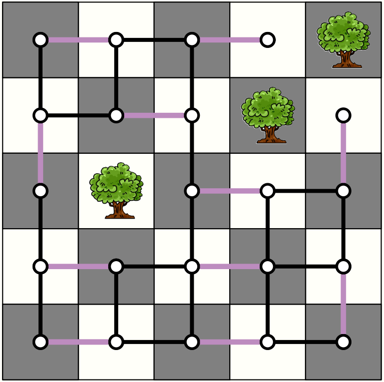
Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases
- Arêtes : entre cases adjacentes
- Pavage = Couplage

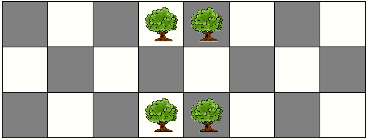


Équivalence avec le carrelage

- Sommets : cases
- Arêtes : entre cases adjacentes
- Pavage = Couplage



Un autre exemple...



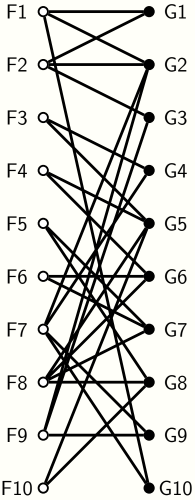
Un autre exemple...

G1	F1	G10			F4	G6	F6
F2	G2	F7	G4	F3	G5	F8	G7
G3	F9	G9			F10	G8	F5

F1 ○	● G1
F2 ○	● G2
F3 ○	● G3
F4 ○	● G4
F5 ○	● G5
F6 ○	● G6
F7 ○	● G7
F8 ○	● G8
F9 ○	● G9
F10 ○	● G10

Un autre exemple...

G1	F1	G10			F4	G6	F6
F2	G2	F7	G4	F3	G5	F8	G7
G3	F9	G9			F10	G8	F5



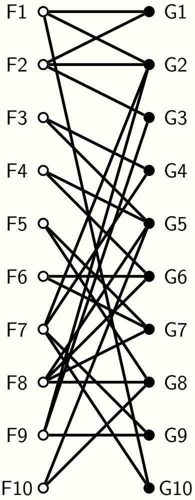
Un autre exemple...

G1	F1	G10			F4	G6	F6
F2	G2	F7	G4	F3	G5	F8	G7
G3	F9	G9			F10	G8	F5

=

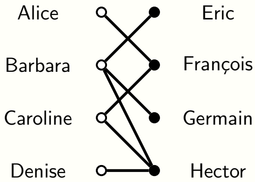
	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

=



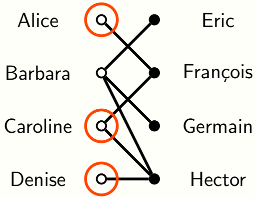
Conditions pour un couplage parfait ?

- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :



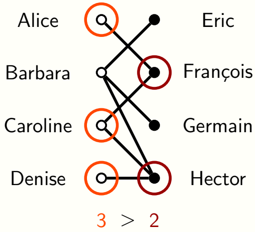
Conditions pour un couplage parfait ?

- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :



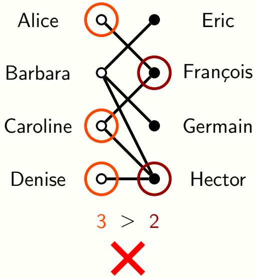
Conditions pour un couplage parfait ?

- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :



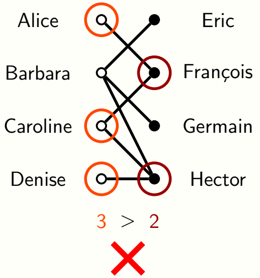
Conditions pour un couplage parfait ?

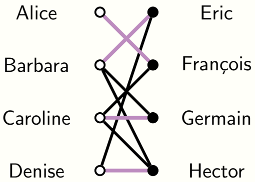
- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :



Conditions pour un couplage parfait ?

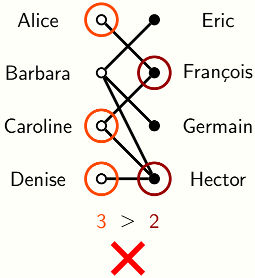
- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :

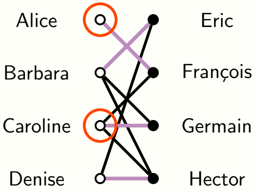




Conditions pour un couplage parfait ?

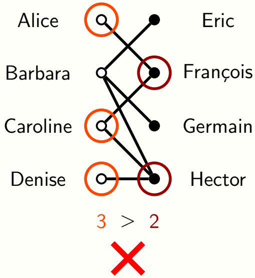
- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :

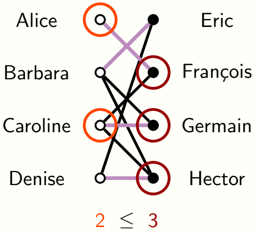




Conditions pour un couplage parfait ?

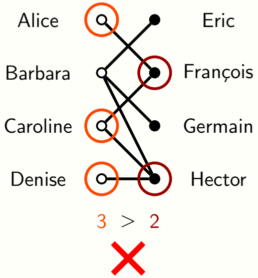
- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :

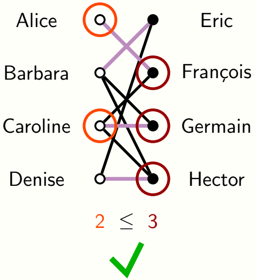




Conditions pour un couplage parfait ?

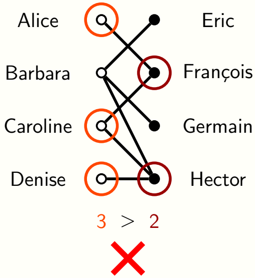
- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :

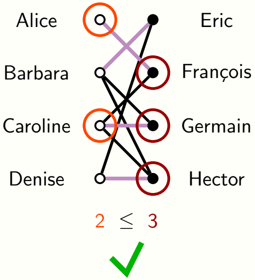




Conditions pour un couplage parfait ?

- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :



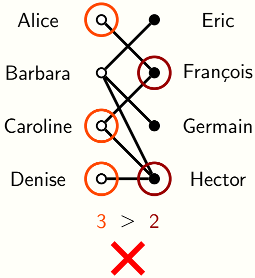


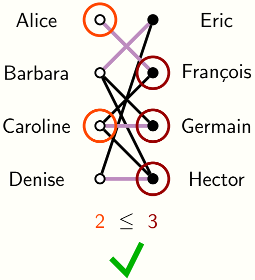
Théorème de Hall

Dans un graphe biparti, il y a un couplage parfait si et seulement si les deux parties sont égales et qu'il n'y a pas de rétrécissement.

Conditions pour un couplage parfait ?

- Même taille des deux parties ($\rightarrow$ condition de coloration !)
- Un groupe d'une partie ne peut pas rétrécir :





Théorème de Hall

Dans un graphe biparti, il y a un couplage parfait si et seulement si les deux parties sont égales et qu'il n'y a pas de rétrécissement.

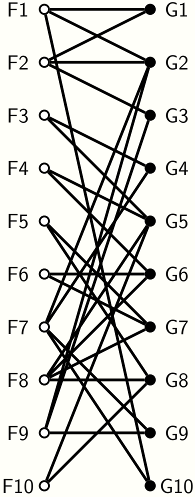
La preuve donne un algorithme pour trouver le couplage parfait.

Application pour nos problemes

Peut-on trouver un rétrécissement ?

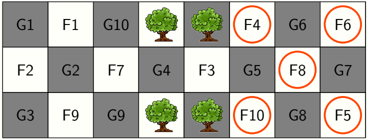
G1	F1	G10			F4	G6	F6
F2	G2	F7	G4	F3	G5	F8	G7
G3	F9	G9			F10	G8	F5

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

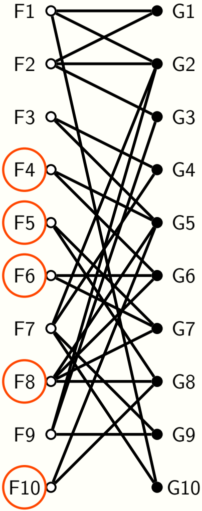


Application pour nos problemes

Peut-on trouver un rétrécissement ?



	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		

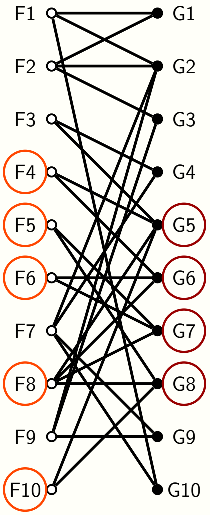


Application pour nos problemes

Peut-on trouver un rétrécissement ?

G1	F1	G10			F4	G6	F6
F2	G2	F7	G4	F3	G5	F8	G7
G3	F9	G9			F10	G8	F5

	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8	G9	G10
F1	x	x								x
F2	x	x	x							
F3				x	x					
F4					x	x				
F5							x	x		
F6						x	x			
F7		x		x					x	x
F8					x	x	x	x		
F9		x	x						x	
F10					x			x		



Une application sur les cartes

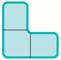
> Si l'on divise un jeu de 52 cartes en 13 paquets de 4 cartes, on peut, en choisissant une carte par paquet, avoir toutes les valeurs de l'as au roi.

Cela marche aussi avec un jeu de 32 cartes...

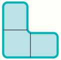
Et ensuite ?

- Avec aussi des mariages homosexuels ?
  $\rightarrow$ L'algorithme d'Edmonds permet de savoir s'il existe un couplage parfait dans un graphe non biparti.

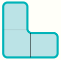
Et ensuite ?

- Avec aussi des mariages homosexuels ?
  → L'algorithme d'Edmonds permet de savoir s'il existe un couplage parfait dans un graphe non biparti.
- Paver avec autre chose ? Par exemple, avec  ou  ?

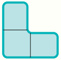
Et ensuite ?

- Avec aussi des mariages homosexuels ?
  $\rightarrow$ L'algorithme d'Edmonds permet de savoir s'il existe un couplage parfait dans un graphe non biparti.
- Paver avec autre chose ? Par exemple, avec  ou  ?
  $\rightarrow$ Pas d'algorithme efficace : c'est NP-complet !

Et ensuite ?

- Avec aussi des mariages homosexuels ?
  $\rightarrow$ L'algorithme d'Edmonds permet de savoir s'il existe un couplage parfait dans un graphe non biparti.
- Paver avec autre chose ? Par exemple, avec  ou  ?
  $\rightarrow$ Pas d'algorithme efficace : c'est NP-complet !
- Avec n'importe quel ensemble de formes et sur tout le plan ?
  $\rightarrow$ Il n'existe pas d'algorithme : c'est indécidable !

Et ensuite ?

- Avec aussi des mariages homosexuels ?
  → L'algorithme d'Edmonds permet de savoir s'il existe un couplage parfait dans un graphe non biparti.
- Paver avec autre chose ? Par exemple, avec  ou  ?
  → Pas d'algorithme efficace : c'est NP-complet !
- Avec n'importe quel ensemble de formes et sur tout le plan ?
  → Il n'existe pas d'algorithme : c'est indécidable !

Merci !