

La situation de la pyramide – Analyse des types de preuves

Niveau de preuve		Le problème du nombre de diagonales d'un polygone	
Typologie	Exemples : La somme de deux multiples de 7 est un multiple de 7	Production d'élève associée	Quelles aides/passerelles pour atteindre un niveau de preuve supérieure ?
Preuve pragmatique	Empirisme naïf	21 et 14 sont des multiples de 7, et leur somme 35 aussi. L'affirmation est donc vraie.	1er Stade (1 copie) aide : donner les 3 définitions (un polygone est une ligne brisée et fermée, un côté est un segment qui relie deux sommets consécutifs, une diagonale est un segment qui relie 2 sommets qui ne se suivent pas) et faire les 2 schémas au tableau.
	Expérience cruciale	6 251 et 417 627 sont des multiples de 7, et leur somme 423 878 aussi. L'affirmation est donc vraie.	2e Stade (1 copie) aide : Trouver un calcul pour obtenir le nombre de diagonales que tu as comptées pour 6, 7 et 8 côtés.
	Exemple générique	7×3 et 7×2 sont des multiples de 7 et leur somme $7 \times 3 + 7 \times 2 = 7 \times (3 + 2)$ aussi. L'affirmation est donc vraie.	3e Stade (2 copies) aide : Sans dessiner continuer la suite des calculs pour 9 et 10 côtés. Tout seul : Généraliser pour 100 côtés.
Preuve intellectuelle	Expérience mentale	Vrai car $7 + 7 + \dots$ est un multiple de 7 donc $7 + 7 + \dots + 7 + 7 + \dots$ est un multiple de 7	4eme Stade (2 copie) aide : Trouver une formule avec n le nombre de côtés.
	Calcul sur les énoncés	Vrai car $(a \times 7) + (b \times 7) = (a + b) \times 7$	
	Démonstration	$7x$ et $7y$ avec x et y des entiers sont des multiples de 7 et leur somme $7x + 7y = 7(x + y)$ avec $x + y$ un entier aussi. L'affirmation est donc vraie.	

Analyse de copies d'élèves, d'un problème de recherche : « les diagonales »

Énoncé :

Un polygone à 4 côtés possède 2 diagonales.

Un polygone à 5 côtés possède 5 diagonales.

Dessine un polygone à 6 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Dessine un polygone à 7 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Dessine un polygone à 8 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Combien de diagonales possède un polygone à 9 côtés ?

Combien de diagonales possède un polygone à 10 côtés ?

Combien de diagonales possède un polygone à 100 côtés ?

Comme le problème sur les segments, ce problème de géométrie sur les diagonales demande d'abord une recherche à partir d'un petit nombre de côtés, c'est-à-dire **qu'un raisonnement de type inductif (exemple naïf, expérience cruciale)** est nécessaire pour résoudre le problème. Nous ne demandons pas explicitement aux élèves de généraliser la solution à partir d'une formule (une généralisation non formelle suffit : **exemple générique**), mais les élèves essayent le plus souvent de produire une procédure de calcul (**expérience mentale**) qu'ils ne démontrent pas. Nous en restons donc le plus souvent à **des preuves pragmatiques (1er stade exemple naïf, 2e stade expérience cruciale et 3e stade exemple générique)** et parfois à **des preuves intellectuelles (4e stade expérience mentale)**.

De plus les élèves peuvent utiliser un raisonnement par analogie avec ce qui a été fait sur les segments (formule donnant le nombre de segments à partir du nombre de points donnés) pour trouver plus facilement une formule donnant le nombre de diagonales d'un polygone à partir du nombre de ses côtés.

Cet énoncé a été proposé **en narration de recherche** sur les diagonales à des élèves de 6ème dans le cadre de l'AP Maths-Français qui a lieu 1h chaque semaine et dont la progression est en parallèle de la progression Mathématiques (**problèmes non directement liés à la notion en cours, programme cycle 3, volet 1**) avec une alternance des périodes de français et des périodes de mathématiques.

Période 1 Mathématiques : Gestion de données, logigrammes

Période 2 Français : Lexique des disciplines

Période 3 Mathématiques : **Narration de recherche**

Période 4 Français : Evaluations nationales : remédiations

Période 5 Mathématiques : 3 séances d'entraînement Triple Défis + 1 séance Concours Kangourou

Période 6 Français : OULIPO Lecture et écriture de petits poèmes

Période 7 Mathématiques : Résolution de problèmes et **narration de recherche**

La narration de recherche sur les segments (voir énoncé dans le document analyse de copies d'élèves, d'un problème de recherche : « les segments ») a d'abord été proposée aux élèves de 6ème en 2 séances et demi suivant les modalités suivantes :

- une première séance pour la recherche au brouillon : prise de connaissance de l'énoncé, extraction des données clés, représentation de l'énoncé, comptage du nombre de segments avec un petit nombre de points, des essais pour trouver une méthode de calcul du nombre de segments ...

Un temps indicatif est affiché au tableau avec **des étapes pour la recherche au brouillon** :

10 min : **Chercher** : surligner les mots clés, extraire les données de l'énoncé.

Représenter : faire un schéma de la situation (ici dessiner les segments pour un petits nombres de points)

15 min : **Modéliser** : écrire la bonne expression mathématique, écrire le calcul correspondant à l'étape de raisonnement (ici trouver une méthode de calcul pour retrouver le nombre de segments comptés avec un petit nombre de points).

Raisonner : écrire les étapes de son raisonnement (ici s'appuyer sur les propriétés des figures pour mener à bien le raisonnement).

15 min : **Calculer** : combiner les opérations $+$, $-$, \times , \div (ici, à partir des dessins et des calculs précédents, trouver une formule).

Communiquer : faire une phrase pour chaque étape de raisonnement et expliquer chaque calcul.

- une deuxième séance pour la rédaction de la narration de recherche, les copies étant ramassées à la fin de l'heure. **Expliquer sa démarche en rédigeant** chacune des étapes réalisées au brouillon en mettant en forme **le texte narratif**.

Consignes donnés aux élèves au tableau :

Une narration de recherche, c'est une façon différente de répondre à un problème. Au lieu, comme d'habitude, de chercher la solution au brouillon et d'écrire seulement la bonne réponse au propre, tu vas raconter comment tu as fait pour chercher la solution.

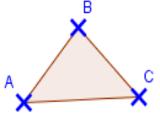
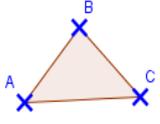
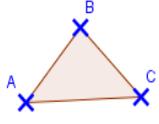
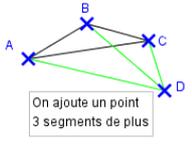
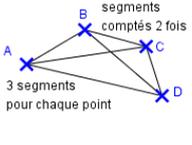
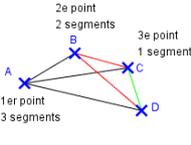
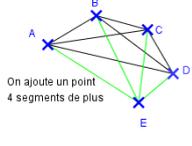
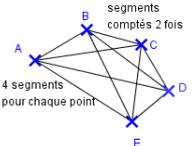
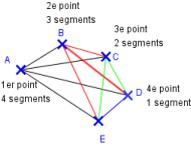
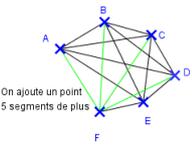
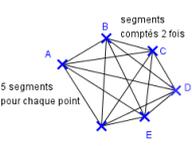
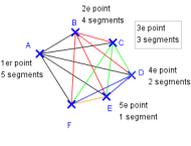
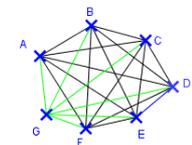
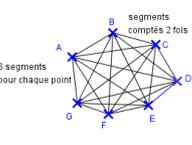
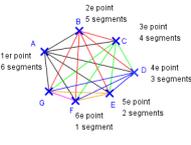
Tu écriras toutes tes idées, même celles qui n'ont pas marché. Des dessins, des calculs ou des essais simples te permettront de progresser vers le résultat mais pour cela, il faudra être persévérant. Car plus que de trouver la réponse, ce qui est important c'est de chercher et de raconter cette recherche.

Ce que tu dois faire :

- raconter avec précision tous tes essais ;
- signaler quand tu change de piste (avec une autre couleur par exemple ou en changeant de paragraphe).
- reproduire les dessins que tu as fait au brouillon si tu as eu besoin d'en faire ;
- et bien sûr, faire un effort pour être compris par celui qui te lira !
- Une demi séance de 20 min pour la correction au tableau avec la classe.

Pour le professeur, une fiche sur les raisonnements possibles pour le nombre de segments à partir d'un nombre de points donnés, synthétise les différentes méthodes avec une partie « Raisonner vs Chercher et preuves pragmatiques » et une partie « Raisonner vs Communiquer et preuves intellectuelles ».

Raisonnements possibles pour le nombre de segments à partir d'un nombre de points donnés

Raisonner vs Chercher					
Par récurrence sur le nombre de points.		En comptant pour chaque points le nombre de segments, segments comptés 2 fois.		En partant d'un point, puis du 2 ^e dans le sens des aiguilles d'une montre sans compter 2 fois le même segments.	
	<u>3 points</u> 3 segments		<u>3 points</u> 3 segments		<u>3 côtés</u> 3 segments
	<u>4 points</u> $3 + 3 = 6$ 6 segments		<u>4 points</u> $4 \times 3 \div 2 = 6$ 6 segments		<u>4 points</u> $3 + 2 + 1 = 6$ 6 segments
	<u>5 points</u> $3 + 3 + 4 = 10$ 10 segments		<u>5 points</u> $5 \times 4 \div 2 = 10$ 10 segments		<u>5 points</u> $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ 10 segments
	<u>6 points</u> $3 + 3 + 4 + 5 = 15$ 15 segments		<u>6 points</u> $6 \times 5 \div 2 = 15$ 15 segments		<u>6 points</u> $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 15 segments
	<u>7 côtés</u> $3 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ 21 segments		<u>7 côtés</u> $7 \times 6 \div 2 = 21$ 21 segments		<u>7 côtés</u> $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ 21 segments
Raisonner vs Communiquer					
<u>10 points</u> $3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + (10 - 1) = 45$ 45 segments		<u>10 points</u> $10 \times (10 - 1) \div 2 = 45$ 45 segments		<u>10 points</u> $(10 - 1) + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$ 45 segments	
<u>Généralisation à 100 points</u>					
<u>100 points</u> $3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 98 + (100 - 1) = 4950$ segments		<u>100 points</u> $100 \times (100 - 1) \div 2 = 4850$ 4950 segments		<u>100 points</u> $(100 - 1) + 98 + 97 + 96 + 95 + 94 + 93 + 92 + \dots + 3 + 2 + 1 = 4950$ segments	
<u>Généralisation à n points</u>					
$S = 3 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 1)$ avec S le nombre de segments et n le nombre de points		$S = n \times (n - 1) \div 2$ avec S le nombre de segments et n le nombre de points.		$S = (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 2 + 1$ avec S le nombre de segments et n le nombre de points.	

La narration de recherche sur les diagonales a été proposée en 1 séance et demi :

- une demi séance pour la recherche au brouillon :

Un temps indicatif est affiché au tableau avec **des étapes pour la recherche au brouillon** :

5 min : **Chercher** : surligner les mots clés, extraire les données de l'énoncé.

Représenter : faire un schéma de la situation (ici dessiner les diagonales pour un petits nombres de côtés)

10 min : **Modéliser** : écrire la bonne expression mathématique, écrire le calcul correspondant à l'étape de raisonnement (ici trouver une méthode de calcul pour retrouver le nombre de diagonales comptées avec un petit nombre de côtés).

Raisonner : écrire les étapes de son raisonnement (ici s'appuyer sur les propriétés des figures pour mener à bien le raisonnement).

10 min : **Calculer** : combiner les opérations +, -, ×, ÷ (ici, à partir des dessins et des calculs précédents, trouver une formule).

Communiquer : faire une phrase pour chaque étape de raisonnement et expliquer chaque calcul.

- une séance pour la rédaction de la narration de recherche, les copies étant ramassées à la fin de l'heure.

Consignes données aux élèves au tableau :

1) 10 min : à faire avec eux pour que tout le monde démarre.

Un polygone à 4 côtés possède 2 diagonales.

Un polygone à 5 côtés possède 5 diagonales.

aide : donner les 3 définitions (un polygone est une ligne brisée et fermée, un côté est un segment qui relie deux sommets consécutifs, une diagonale est un segment qui relie 2 sommets qui ne se suivent pas) et faire les 2 schémas au tableau.

2) 20 min : à faire tout seul

Dessine un polygone à 6 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Dessine un polygone à 7 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

Dessine un polygone à 8 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

aide : Trouver un calcul pour obtenir le nombre de diagonales que tu as comptées pour 6, 7 et 8 côtés.

3) 20 min : à faire tout seul

Combien de diagonales possède un polygone à 9 côtés ?

Combien de diagonales possède un polygone à 10 côtés ?

Combien de diagonales possède un polygone à 100 côtés ?

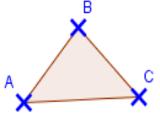
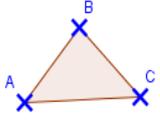
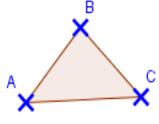
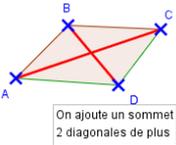
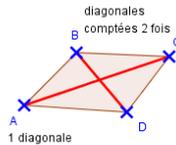
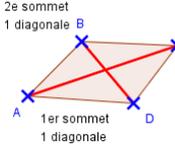
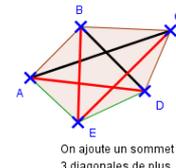
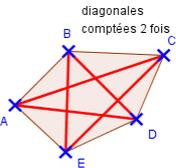
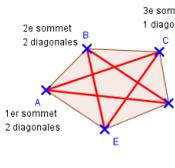
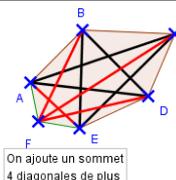
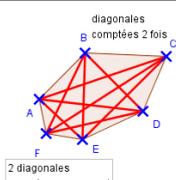
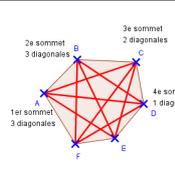
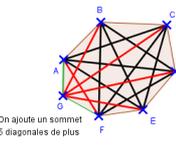
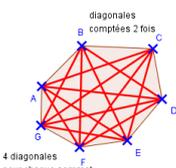
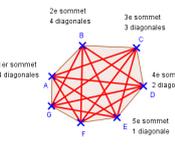
aide : Sans dessiner continuer la suite des calculs pour 9 et 10 côtés.

Tout seul : Généraliser pour 100 côtés.

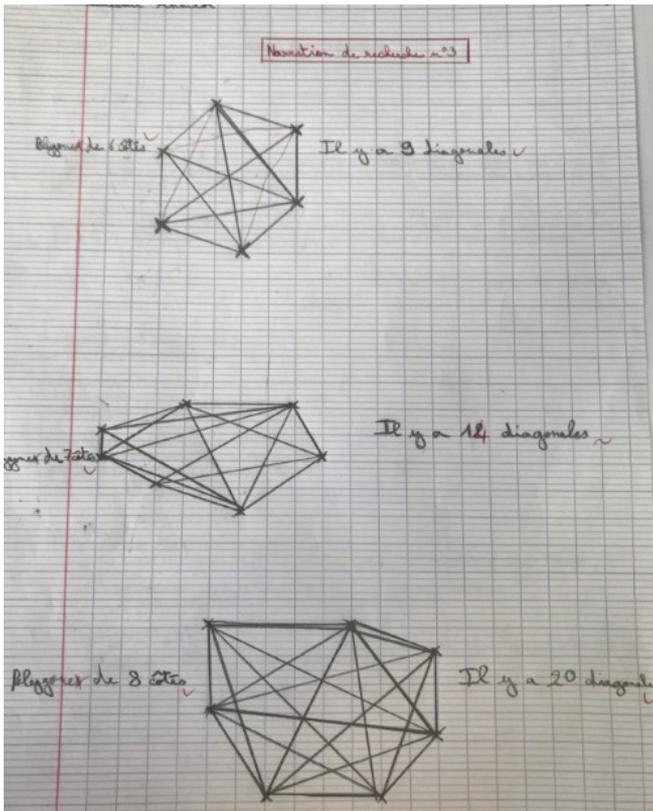
aide : Trouver une formule avec n le nombre de côtés.

Pour le professeur, une fiche sur les raisonnements possibles pour le nombre de diagonales d'un polygone synthétise les différentes méthodes avec une partie « Raisonner vs Chercher et preuves pragmatiques » et une partie « Raisonner vs Communiquer et preuves intellectuelles » afin de pouvoir aider les élèves à passer à un stade de raisonnement supérieur.

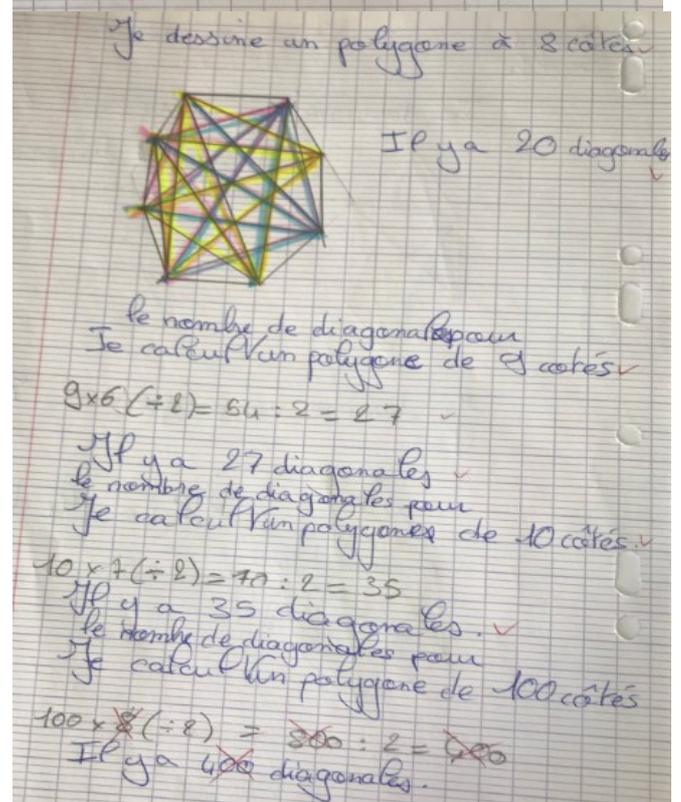
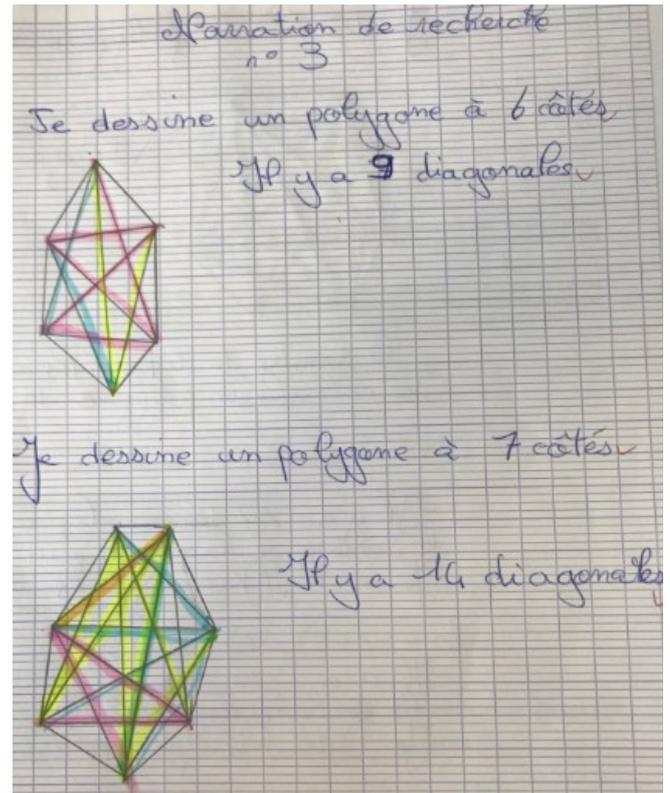
Raisonnements possibles pour le nombre de diagonales d'un polygone

Raisonner vs Chercher et preuves pragmatiques (action)					
Par récurrence sur le nombre de sommets.		En comptant pour chaque sommet le nombre de diagonales, diagonales comptées 2 fois.		En partant d'un sommet, puis du 2e dans le sens des aiguilles d'une montre sans compter 2 fois la même diagonale.	
	<u>3 côtés</u> 0 diagonales		<u>3 côtés</u> 0 diagonales		<u>3 côtés</u> 0 diagonales
 <small>On ajoute un sommet 2 diagonales de plus</small>	<u>4 côtés</u> 0 + 2 2 diagonales	 <small>diagonales comptées 2 fois 1 diagonale pour chaque sommet</small>	<u>4 côtés</u> $4 \times 1 \div 2 = 2$ 2 diagonales	 <small>2e sommet 1 diagonale 1er sommet 1 diagonale</small>	<u>4 côtés</u> 1 + 1 = 2 2 diagonales
 <small>On ajoute un sommet 3 diagonales de plus</small>	<u>5 côtés</u> 2 + 3 = 5 5 diagonales	 <small>diagonales comptées 2 fois 2 diagonales pour chaque sommet</small>	<u>5 côtés</u> $5 \times 2 \div 2 = 5$ 5 diagonales	 <small>2e sommet 2 diagonales 3e sommet 1 diagonale 1er sommet 2 diagonales</small>	<u>5 côtés</u> 2 + 2 + 1 = 5 5 diagonales
 <small>On ajoute un sommet 4 diagonales de plus</small>	<u>6 côtés</u> 2 + 3 + 4 = 9 9 diagonales	 <small>diagonales comptées 2 fois 2 diagonales pour chaque sommet</small>	<u>6 côtés</u> $6 \times 3 \div 2 = 9$ 9 diagonales	 <small>2e sommet 3 diagonales 3e sommet 2 diagonales 4e sommet 1 diagonale 1er sommet 3 diagonales</small>	<u>6 côtés</u> 3 + 3 + 2 + 1 = 9 9 diagonales
 <small>On ajoute un sommet 5 diagonales de plus</small>	<u>7 côtés</u> 2 + 3 + 4 + 5 = 14 14 diagonales	 <small>diagonales comptées 2 fois 4 diagonales pour chaque sommet</small>	<u>7 côtés</u> $7 \times 4 \div 2 = 14$ 14 diagonales	 <small>2e sommet 4 diagonales 3e sommet 3 diagonales 4e sommet 2 diagonales 5e sommet 1 diagonale 1er sommet 4 diagonales</small>	<u>7 côtés</u> 4 + 4 + 3 + 2 + 1 = 14 14 diagonales
Raisonner vs Communiquer et preuves intellectuelles (abstraction, opérations, transformations)					
<u>10 côtés</u> $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + (10 - 2) = 35$ 35 diagonales		<u>10 côtés</u> $10 \times (10 - 3) \div 2 = 35$ 35 diagonales		<u>10 côtés</u> $(10 - 3) + (10 - 3) + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 35$ 35 diagonales	
<u>Généralisation à 100 côtés</u>					
<u>100 côtés</u> $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + \dots + 97 + (100 - 2) = 4850$ 4850 diagonales		<u>100 côtés</u> $100 \times (100 - 3) \div 2 = 4850$ 4850 diagonales		<u>100 côtés</u> $(100 - 3) + (100 - 3) + 96 + 95 + 94 + \dots + 3 + 2 + 1 = 4850$ 4850 diagonales	
<u>Généralisation à n côtés</u>					
D = $0 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 2)$ avec D le nombre de diagonales et n le nombre de côtés		D = $n \times (n - 3) \div 2$ avec D le nombre de diagonales et n le nombre de côtés		D = $(n - 3) + (n - 3) + (n - 2) + \dots + 2 + 1$ avec D le nombre de diagonales et n le nombre de côtés	

Copies d'élèves de 6ème :



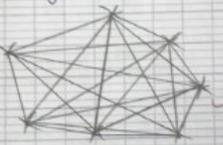
1er Stade : empirisme naïf

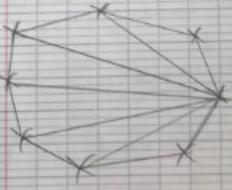


2e Stade : expérience cruciale

Narration de recherche

1)  IL y a 7 diagonales dans un polygone à 6 côtés ✓

2) Polygone à 7 côtés:  IL y a 14 diagonales dans un polygone à 7 côtés ✓

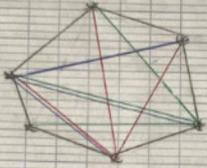
3) Polygone à 8 côtés  $8 \times 5 = 40$
 $40 \div 2 = 20$
IL y a 20 diagonales dans un polygone à 8 côtés ✓

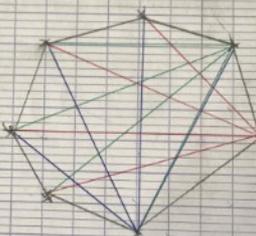
4) Polygone à 9 côtés: $9 \times 6 = 54$
 $54 \div 2 = 27$ IL y a 27 diagonales dans un polygone à 9 côtés ✓

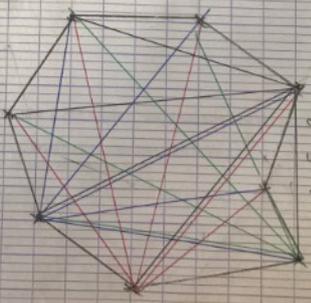
Polygone à 10 côtés ✓
 $10 \times 7 = 70$
 $70 \div 2 = 35$ IL y a 35 diagonales dans un polygone à 10 côtés ✓

Polygone à 100 côtés ✓
 $100 - 3 = 97$
 $97 \times 100 = 9700$
 $9700 \div 2 = 4850$
IL y a 4850 diagonales dans un polygone à 100 côtés ✓

3e Stade : l'exemple générique

Voici le polygone à 6 côtés  IL y a 5 diagonales dans un polygone à 6 côtés ✓

Voici le polygone à 7 côtés  IL y a 14 diagonales dans un polygone à 7 côtés ✓

Voici le polygone à 8 côtés  IL y a 20 diagonales dans un polygone à 8 côtés ✓

Compter les diagonales possible en polygone à 6 côtés

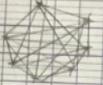
Pour savoir compter les diagonales dans un polygone à 6 côtés il faut faire $6 \times 5 = 30$ $30 \div 2 = 15$ dans un polygone à 6 côtés il y a 15 diagonales ✓

Pour savoir compter les diagonales dans un polygone à 10 côtés il faut faire $10 \times 7 = 70$ $70 \div 2 = 35$ dans un polygone à 10 côtés il y a 35 diagonales ✓

Pour savoir compter les diagonales dans un polygone à 100 côtés il faut faire $100 \times 97 \div 2 = 4850$ ✓

3e Stade : l'exemple générique

Voici de polygone à 6 côtés : ✓
 9 diagonales ✓

Voici de polygone à 7 côtés : ✓
 14 diagonales ✓

Voici de polygone à 8 côtés : ✓
 20 diagonales ✓

Je calcule combien de diagonales pour 9 côtés ✓
 $9 \times 3 = 6$ 6 côtés $6 \times 9 = 54$ $54 \div 2 = 27$ ✓
 27 diagonales ✓

Pour 10 côtés ✓
 $10 \times 3 = 7$ 7 côtés $7 \times 10 = 70$ $70 \div 2 = 35$ ✓
 35 diagonales ✓

Pour 100 côtés ✓
 $100 \times 3 = 97$ 97 côtés $97 \times 100 = 9700$ $9700 \div 2 = 4850$ ✓
 4850 diagonales ✓

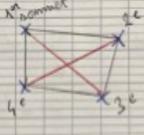
✓ Pour 6 côtés on voit qu'il y a 3 diagonales par point ✓
 Pour 7 côtés on voit qu'il y a 4 diagonales par point ✓
 Pour 8 côtés on voit qu'il y a 5 diagonales par point ✓

On soustrait 3 au total de côtés de polygone puis on multiplie au côtés et on divise en 2 et on trouve le résultat ✓

4e Stade : l'expérience mentale

Etape 1

1) Commençons par dessiner des polygones à 4 et 5 côtés ✓



Rappelons qu'un polygone est une ligne brisée et fermée. ✓
 Rappelons qu'un côté est un segment qui relie 2 sommets qui se suivent ✓

4 côtés

Rappelons qu'une diagonale est un segment qui relie 2 sommets qui ne se suivent pas ✓

Donc un polygone à 4 côtés a 2 diagonales. ✓

5 côtés



5 côtés pour 5 diagonales ✓
 $5 \times 2 \div 2 = 5$ ✓

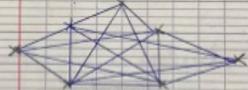
Commençons par dessiner des polygones et comptons le nombre de diagonales à 6 et 8 côtés

Etape 2 6 côtés



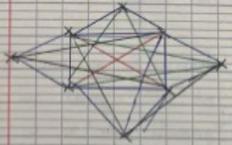
6 côtés pour 9 diagonales ✓
 $6 \times 3 \div 2 = 9$ ✓

7 côtés



7 côtés pour 14 diagonales ✓
 $2 \times 4 \div 2 = 4$ $4 \times 7 = 28$ $28 \div 2 = 14$ ✓

8 côtés



8 côtés pour 20 diagonales ✓
 $8 \times 5 \div 2 = 20$ ✓

Etape 3 9 côtés

$9 \times 6 \div 2 = 27$ ✓
 Un polygone à 9 côtés a 27 diagonales ✓

10 côtés :

10 côtés = $10 \times 7 \div 2 = 35$ ✓
 Un polygone à 10 côtés a 35 diagonales ✓

100 côtés =

$100 \times 97 \div 2 = 4850$ ✓
 Un polygone à 100 côtés a 4850 diagonales. On a trouvé que pour avoir le nombre de diagonales il faut faire $n \times (n-3) \div 2$ et remplacer

4e Stade : l'expérience mentale