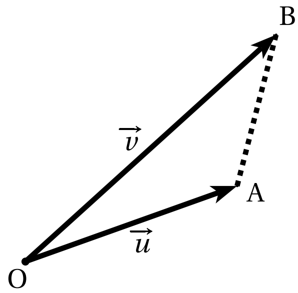
On se place dans un repère orthonormé $(O;I,J)$ du plan.

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$.

Le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel $\boldsymbol{xy'-x'y}$. On le note $\det(\vec{u},\vec{v})$.



Interprétation géométrique du déterminant

A et B sont les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$. Alors $\boldsymbol{|\det(\vec{u},\vec{v})| = 2\times \text{Aire(OAB)}}$

Démonstration dans un cas particulier (voir le fichier *geogebra* joint) :

$$\begin{aligned}
\text{Aire(OAB)} &= \text{Aire(OBB')} - \text{Aire(OAA')} - \text{Aire(AA'B'B)}\\
&= \frac{x'y'}{2} - \frac{xy}{2} - \frac{(y+y')(x'-x)}{2}\\
&= \frac{x'y' - xy - yx' + yx - y'x' + y'x}{2}\\
&= \frac{xy' - x'y}{2}\\
&= \frac{\det(\vec{u},\vec{v})}{2}
\end{aligned}$$

Remarque :

Soit C le point tel que le quadrilatère $OACB$ soit un parallélogramme. Alors $\boldsymbol{|\det(\vec{u},\vec{v})| = \text{Aire(OACB)}}$