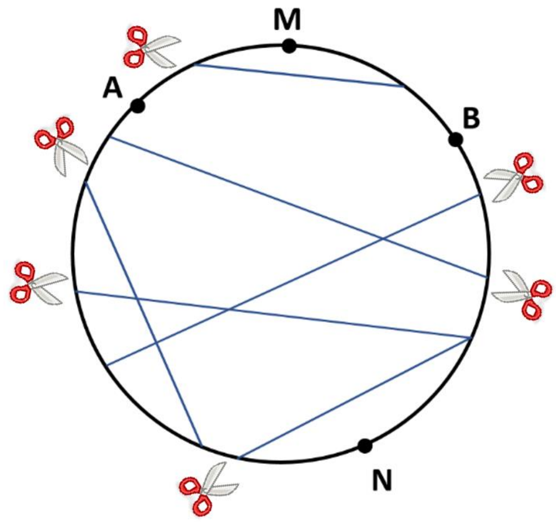
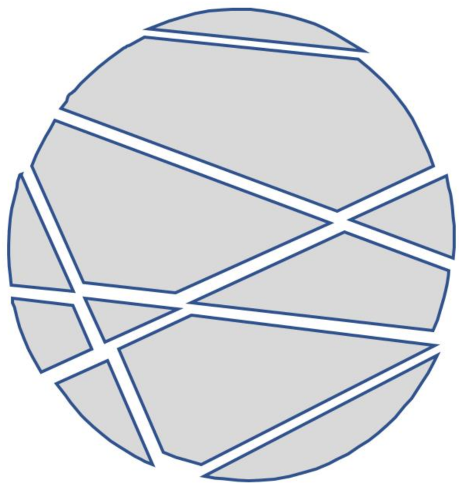
Découpage complet d'un disque et nombre de parties





On considère un disque qu'on découpe suivant un nombre **C** de **cordes**, concourantes ou non (on rappelle qu'une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités sont 2 points distincts du cercle).

On obtient alors un nombre **P** de « morceaux de disque » que l'on appellera **parties**.

<u>*Dans tout l'exercice*</u> *on supposera qu'à l'intérieur du disque (**c'est-à-dire en dehors des points du cercle**), chaque intersection de cordes n'appartiendra qu'à deux cordes seulement, ces intersections seront appelées « intersections simples ».*

On note **S** le nombre d'**intersections simples**.

Dans l'exemple d'illustration ci-dessus, on a C = 6 ; P = 11 et S = 4.

<u>Partie I : Relation entre P, C et S :</u>

1) *a*) Tracer la corde [AB] dans le disque ci-dessus puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

_b_) Tracer la corde [MN] (en plus de [AB]) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

_c_) Tracer la corde [AN] (en plus des 2 précédentes) puis préciser les nouvelles valeurs de C, P, S.

2) Etude du cas général :

On considère un disque contenant C cordes, P parties et S intersections simples.

On trace une nouvelle corde [AB] et on note k le nombre d'intersections simples <u>sur la corde</u> [AB] (k entier naturel, pouvant être nul), P' le nombre de parties, S' le nombre d'intersections simples et C' le nombre de cordes dans le disque.

_a_) Justifier que S' = S + k et que P' = P + k + 1 puis montrer que P' – S' – C' = P – S – C .

_b_) Déduire que, quel que soit le nombre C de cordes tracées dans le disque, on a : P – S – C = 1 .

Partie II : Application au découpage complet d'un disque : conjectures et calculs.

On considère N points distincts deux à deux $A_1, \dots, A_N$ sur un cercle (N entier naturel non nul).

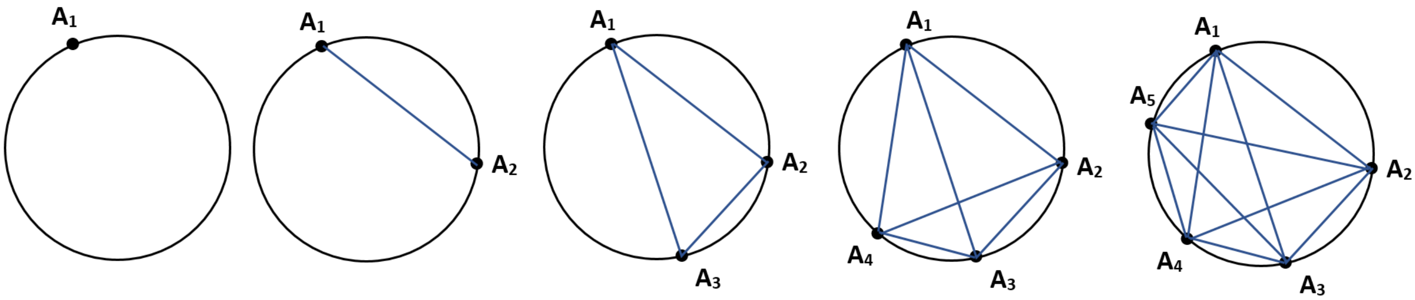
Chaque point est relié à tous les autres par des cordes (on dira qu'on a un découpage complet du disque). Comme dans la Partie I, on suppose que les points d'intersection des cordes à l'intérieur du disque sont des intersections simples.

On note : C_N le nombre de cordes,

S_N le nombre d'intersections simples,

P_N le nombre de parties dans le disque.

1) Voici les 5 premiers cas de figure :



***a*)** Préciser les valeurs de P_1, P_2, P_3, P_4, P_5.

***b*)** Au vu de ces premières valeurs de P_N, conjecturer les valeurs de P_6 et de P_9.

Cas général : dans la suite, on considère N points $A_1, A_2, \dots, A_N$ sur le cercle.

2) Soit A_k un des points sur le cercle ($1 \leq k \leq N$).

Combien de cordes contiennent le point A_k ? Déduire que $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

3) On admet qu'il y a 24 façons d'ordonner 4 éléments { A ; B ; C ; D }.

(Par exemple { A ; B ; C ; D } ; { A ; B ; D ; C } ; { A ; C ; B ; D } ; … ; { D ; C ; B ; A })

Montrer que $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

4) Établir que $P_N = 1 + \frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}$.

5) *a*) Retrouver par le calcul les valeurs de P_1 ; P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 puis calculer P_6.

***b*)** Existe-t-il un entier naturel N tel que $P_N = 256$? Préciser.

Proposition de solution (D'autres méthodes restant possibles)

Partie I

1) *a*) En traçant la corde [AB] on compte C = 7 cordes, P = 12 parties et S = 4 intersections simples.

b) En ajoutant [MN] on trouve : C = 8 ; P = 19 ; S = 10.

c) En ajoutant [AN] on trouve : C = 9 ; P = 24 ; S = 14.

2) *a*) • $S' = S + k$:

Dans cet exercice les k intersections sur [AB] étant supposées simples elles sont toutes distinctes des S intersections précédentes (car autrement elles seraient intersection de 3 cordes, donc pas simples) donc elles s'ajoutent aux S intersections précédentes.

- Pour $P' = P + k + 1$:

Si k = 0, [AB] sépare une partie en 2, d'où l'ajout d'une partie donc $P' = P + 0 + 1$

Sinon soient I_1, … , I_k les intersections simples sur [AB] : les k+1 segments $[AI_1]$; … ; $[I_{k-1}I_k]$; $[I_KB]$ séparent une partie en 2, d'où l'ajout de k + 1 parties dans le disque, donc $P' = P + k + 1$.

- Par ajout de la corde [AB] on a donc $P' = P + k + 1$; $S' = S + k$ et $C' = C + 1$ d'où :

$$P' - S' - C' = (P + k + 1) - (S + k) - (C + 1) = P - S - C.$$

b) Le résultat précédent montre que l'ajout d'une corde dans le disque ne change pas la valeur de $P - S - C$, laquelle reste donc constante quel que soit le nombre C de cordes, or pour C = 0 corde on a le disque dans son entier donc dans ce cas $P - S - C = 1 - 0 - 0 = 1$, donc quel que soit le nombre C de cordes on a : $P - S - C = 1$.

Partie II

1) *a*) On compte successivement : $P_1 = 1$; $P_2 = 2$; $P_3 = 4$; $P_4 = 8$; $P_5 = 16$ parties dans le disque.

b) Avec ces premiers exemples on observe que lorsqu'on ajoute un point sur le cercle, le nombre de parties double ce qui nous amène à conjecturer que $P_6 = 2\times P_5 = 32$ et $P_9 = P_6\times 2\times 2\times 2 = 256$.

2) Les cordes contenant A_k s'obtiennent en reliant A_k au (N-1) autres points, d'où (N-1) cordes.

Comme il y a N points, on déduit que l'on peut former N×(N-1) cordes en tout, mais ce faisant chaque corde sera comptée deux fois ($[A_pA_q]$ et $[A_qA_p]$) d'où le nombre de cordes $C_N = \frac{N(N-1)}{2}$.

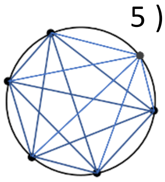
3) Les intersections étant simples, chaque intersection peut être associée de manière unique à 4 points que l'on pourra noter A, B , C , D, et inversement, par contre l'ordre des points A, B, C , D est indifférent pour y associer son intersection simple.

Comme il y a N points pour le choix de A, associés à (N-1) autres pour B, (N-2) autres pour C et (N-3) autres pour D, on a donc N(N-1)(N-2)(N-3) façons de choisir 4 points parmi N, mais par ce mode de calcul on compte (on distingue) les différents ordres de A, B, C, D possibles donc le nombre d'intersections simples est $S_N = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}$.

Remarque : ce raisonnement suppose $N \geq 4$ mais pour N = 1; 2; 3 on a $S_N = 0$ donc cette formule reste valable.

4) Avec la Partie I) 2) *b*) , on a $P_N = 1 + S_N + C_N$ et avec 2) et 3) précédents on déduit que :

$$\begin{aligned} P_N &= 1+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24} + \frac{N(N-1)}{2} \\ &= 1 + \frac{N(N-1)[(N-2)(N-3)+12]}{24} \\ &= 1 + \frac{N(N-1)(N^2-5N+18)}{24}. \end{aligned}$$



5) *a*) Avec cette formule on retrouve $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$, $P_4 = 8$, $P_5 = 16$ comme observé au 1) *a*), par contre on trouve $P_6 = 31$ (et non 32 contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) *b*) !!)

b) Avec un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice on obtient $P_{10} = 256$ (et non pour P_9 (= 162) contrairement à ce qui a été conjecturé au 1) b) !!).

Moralité : conjecture ne vaut pas propriété, observation (même convaincante) ne vaut pas démonstration !