Académie de Lyon

TraAM 2014-2015 :

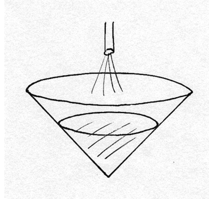
Développer avec les TICE l'appétence des élèves pour la résolution de problèmes en mathématiques

Séquence
Curieux remplissage d'un vase conique

Groupe académique

Dominique Bernard
Jean-Louis Bonnafet
Daniel Di Fazio
Stéphanie Evesque
Christian Mercat
Jean-François Zucchetta

INTRODUCTION A LA DERIVATION : CURIEUX REMPLISSAGE D'UN VASE CONIQUE

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm^3/min?	

Activité inspirée du groupe aha *auteur de « Vers l'infini pas à pas » De Boeck Wesmael*

PRESENTATION

Thème : activité d'introduction à la dérivation utilisant le taux d'accroissement se basant sur les notions de débit moyen et débit instantané qui prennent du sens pour les élèves.

Dérivation Nombre dérivé d'une fonction en un point. Tangente à la courbe	• Tracer une tangente connaissant	Le nombre dérivé est défini comme limite du taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0. On ne donne pas de définition formelle de la limite.

Niveau : première S.

Place dans la progression : une activité, parmi d'autres, destinée à introduire la dérivation en 1ère S.

Utilisation des TICE : tableur, logiciel de calcul formel devraient se révéler des outils indispensables à la résolution du problème.

OBJECTIF

Donner du sens au passage « à la limite » et montrer que dans ce cas, le résultat obtenu peut s'interpréter simplement en comparant le débit dans le cône à celui d'un cylindre.

SCENARIO

I. Activités réalisées auparavant

Cette activité doit servir d'introduction à la dérivation. En amont, ont été traités le chapitre sur le second degré et celui de géométrie avec les équations cartésiennes de droites. Des études d'intersection de droites et de paraboles ont été conduites en exercice, dégageant la notion de tangente et les activités suivantes ont été réalisées avec les TICE:

1. Découverte de la notion de tangente à une courbe (p 44 du document d'accompagnement analyse)

Au sommet d'un monticule de neige de 25m de haut se trouve planté un bâton de 1 m de haut. À quelle distance minimale du pied du monticule faut-il se placer pour apercevoir le bout du bâton de 1 m de haut ?

(Utilisation de geogebra pour comprendre la situation et du calcul algébrique)

2. Activité « le radar » pour introduire la notion de vitesse instantanée (p.47 du document d'accompagnement analyse)
(Introduction de la notion de taux d'accroissement, de la notion de limite, utilisation du calcul formel…)

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/85/8/doc-accompagnement-analyse-premiere-final_212858.pdf

3. Remplissage d'un réservoir conique : vitesse d'ascension du niveau d'eau.

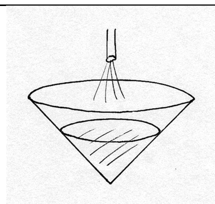
Considérons un réservoir conique de hauteur h mètres dont le cercle du sommet a un rayon de r m. Le réservoir se remplit d'eau avec un débit constant $\frac{\Delta V}{\Delta t} = D$ en m^3.s^{-1} où V représente le volume d'eau dans le réservoir en m^3 et t le temps en seconde. 1. Déterminer le modèle mathématique permettant de définir la **vitesse** avec laquelle le niveau d'eau monte dans le réservoir. 2. Si le réservoir a une hauteur de 10 m et un rayon de 5 m et qu'il se remplit d'eau au rythme de 2 m^3.s^{-1}, déterminer à quelle **vitesse** monte le niveau d'eau lorsque ce dernier atteint une hauteur de 6 m.

Il s'agit d'un problème de taux d'accroissement liés.

II. Mise en œuvre

Durée totale : 2 heures en classe.

Première heure, en classe entière: l'énoncé est distribué et l'animation vase conique est projetée. La consigne est de déterminer les variables, les liens entre ces variables puis de définir la fonction à étudier.

Une pompe alimente un vase conique. Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100 cm^3/min?	

En une heure, certains ont à peine eu le temps d'exprimer le volume en fonction du temps. Ils ont bien compris que le débit augmentait mais ont eu du mal à exprimer ce débit en fonction du temps.

Deuxième heure : en demi-classe, par groupes de deux élèves: mise en commun de l'expression du volume en fonction du temps puis prise d'initiatives pour répondre à la question. Travail achevé à la maison pour les plus lents. Pas d'ordinateur à disposition donc pas d'utilisation du calcul formel.
Coup de pouce : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ déjà utilisée mais rappelée ici.

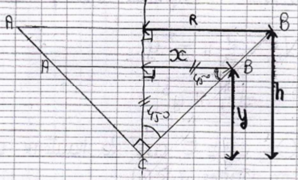
RETOUR D'EXPERIENCE

Différentes étapes attendues (en caractères gras) et ce que les élèves ont produit (commentaires en italiques) :

1. Calculer le volume en fonction du temps : *c'est une difficulté pour nombre d'élèves, il faut lister les variables, faire le lien entre elles ce qui utilise la géométrie du triangle (coupe transversale du cône) et l'information de l'énoncé : le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute ! Ce qui fait beaucoup d'informations à gérer…*

DONNÉES :

Voici le schéma du cône vue de face.



y : hauteur de l'eau (variable) de 1 cm / min
h : hauteur du vase conique (paramètre)
t : temps en min (variable)
D : débit de l'eau (variable), en effet il augmente pour respecter l'énoncé, $D = \frac{\Delta V}{\Delta t}$
V : volume du cône $V = \frac{1}{3}\pi R^2 y$
R : Rayon du cône
x : Rayon de l'eau du cone (variable)

Avec des raccourcis…

• 1 cm d'eau = 1 min
la hauteur de l'eau qui coule est égale au temps

Diviser l'expression du volume versé au temps t, soit $V(t) = 1/3\ \pi\ t^3$, par cette même valeur de t avant d'égaler à 100. *Aucun élève n'est tombé dans ce piège*

2. Évaluer des débits sur de plus petits laps de temps, ce qui conduit à un découpage du temps de plus en plus fin. Par exemple sur [t ; t+1]

t	V(t)	débit moyen sur [0;t]	débit moyen sur [t; t+1]
0	0	0	1,047
1	1,047	1,047	7,330
2	8,378	4,189	19,897
3	28,274	9,425	38,746
4	67,021	16,755	63,879
5	130,900	26,180	95,295
6	226,195	37,699	132,994
7	359,189	51,313	176,976
8	536,165	67,021	227,242
9	763,407	84,823	283,791
10	1047,198	104,720	

Calculons les volumes à différentes minutes.

$\underline{V_1} : \frac{1}{3}\pi$

$\underline{V_2} : \frac{1}{3}\pi \times 2^3$
$= \frac{1}{3}\pi \times 8$

Débit :
$D = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times 8 - \frac{1}{3}\pi}{2-1} = \frac{\frac{7}{3}\pi}{1} \approx 7,33\ cm^3/1\ min$

1 heure

$\underline{V_3} = \frac{1}{3}\pi \times 27$

$D = \frac{V_3 - V_2}{3-2} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times 27 - \frac{1}{3}\pi \times 8}{1} = \frac{\frac{1}{3}\pi \times 19}{1} = \frac{\frac{19}{3}\pi}{1} \approx 19,90\ cm^3/min$

$\cancel{V_4 = \frac{1}{3}\pi \times}$ On s'est demandés si le volume était proportionnel entre les différentes minutes mais en faisant le rapport entre la ~~du~~ volume de la ~~deux~~ premier minute et la deuxième minute, le résultat n'est pas proportionnel avec le volume entre la troisième minute et la deuxième minute.

Par Calcul, on va se rapprocher de la valeur de débit 100 cm³/min puis l'on va réduire le temps t

Entre 5 et 6 cm : $\frac{\frac{1}{3}\pi \times 6^3 - \frac{1}{3}\pi \times 5^3}{6-5} \approx 95,29\ cm^3/min$

Entre 6 et 7 cm : $\frac{\frac{1}{3}\pi \times 7^3 - \frac{1}{3}\pi \times 6^3}{7-6} \approx 132,99\ cm^3/min$

Entre 5,5 et 6 cm : $\frac{\frac{1}{3}\pi \times 6^3 - \frac{1}{3}\pi \times 5,5^3}{6-5,5} \approx 103,93\ cm^3/min$

Certains espèrent une relation de proportionnalité…

3. Est-ce qu'on peut approcher le problème d'une autre façon ?

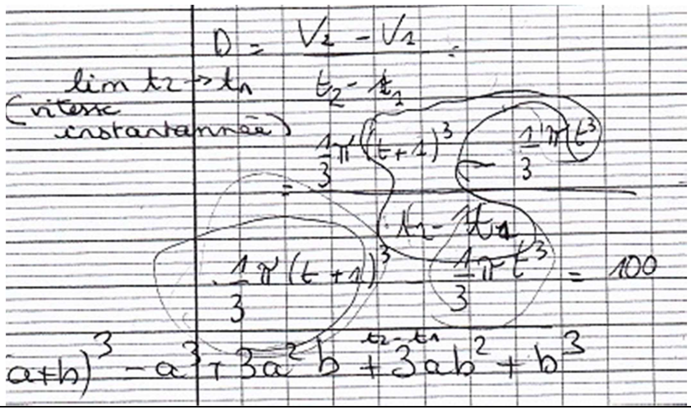
En prenant un intervalle de temps d'une minute. C'est-à-dire, entre t et $t+1$, en écrivant que le débit moyen est égal à 100 :

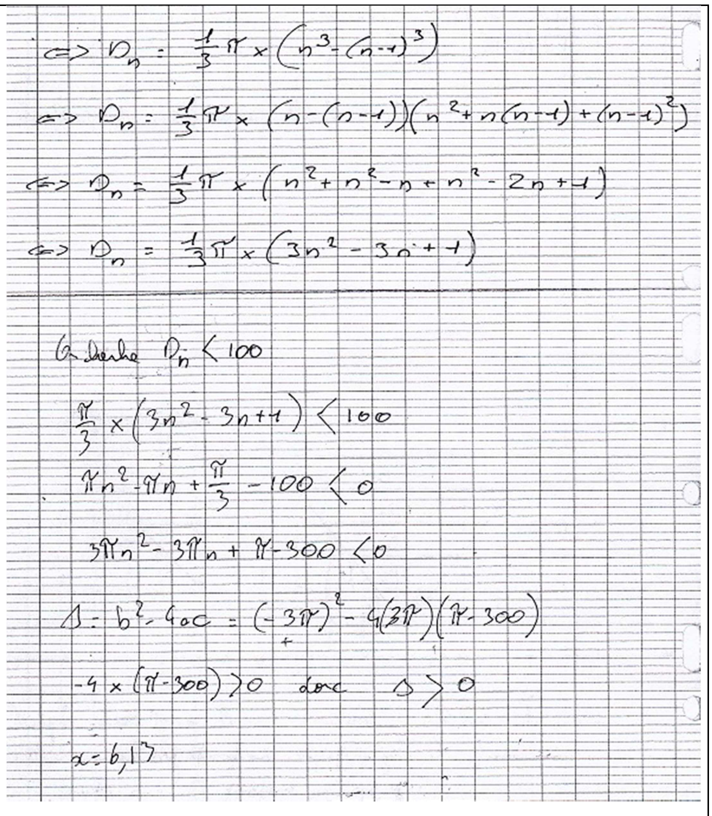
$$\frac{V(t+1)-V(t)}{1}=\frac{\pi(t+1)^3}{3}-\frac{\pi t^3}{3}=100$$

la racine positive est *t = 5,1345 (résolution avec équation du second degré ou calcul formel)*

Le découpage du temps en minutes est ici naturel pour les élèves

Un intervalle de temps naturel pour les élèves est ici de la forme [t ; t+1] ou [n-1 ; n] puisque le débit est exprimé en cm3 par minute !


$D = \frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}$
$\lim t_2 \to t_1$
(vitesse instantanée)
$\frac{1}{3}\pi(t+1)^3 \quad \frac{1}{3}\pi t^3$
t_2-t_1
$\frac{1}{3}\pi(t+1)^3-\frac{1}{3}\pi t^3=100$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$


$\Leftrightarrow D_n=\frac{1}{3}\pi\times(n^3-(n-1)^3)$
$\Leftrightarrow D_n=\frac{1}{3}\pi\times(n-(n-1))(n^2+n(n-1)+(n-1)^2)$
$\Leftrightarrow D_n=\frac{1}{3}\pi\times(n^2+n^2-n+n^2-2n+1)$
$\Leftrightarrow D_n=\frac{1}{3}\pi\times(3n^2-3n+1)$
On cherche $D_n<100$
$\frac{\pi}{3}\times(3n^2-3n+1)<100$
$\pi n^2-\pi n+\frac{\pi}{3}-100<0$
$3\pi n^2-3\pi n+\pi-300<0$
$\Delta: b^2-4ac=(-3\pi)^2-4(3\pi)(\pi-300)$
$-4\times(\pi-300)>0$ donc $\Delta>0$
$x=6,13$

Un intervalle d'une durée de 0,1 min à partir de l'instant t conduit à une équation

$$\frac{V(t+0,1)-V(t)}{0,1}=\frac{\frac{\pi(t+0,1)^3}{3}-\frac{\pi t^3}{3}}{0,1}=\frac{10\pi}{3}(t^3+3t^2.0,1+3t.0,1^2+0,1^3-t^3)=100$$

de racine positive *t = 5,59 (résolution avec équation du second degré ou calcul formel)*

Aucun élève n'a divisé la minute en dixièmes de minute !

4. Comment continuer ce processus ? Recherche du débit moyen de l'eau sur $[t, t+\Delta t]$

$$\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=\frac{\frac{\pi(t+\Delta t)^3}{3}-\frac{\pi t^3}{3}}{\Delta t}=\frac{\pi}{3\Delta t}(t^3+3t^2.\Delta t+3t.\Delta t^2+\Delta t^3-t^3)$$

Soit, dans le cas présent $\pi t^2+\pi t.\Delta t+1/3\,\pi(\Delta t)^2$ (1) puis passage à la limite :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \pi t^2 = 100$$

C'est à dire rendre nul Δt avant d'égaler à 100 l'expression du débit $\pi t^2 = 100$ d'où t environ égal à 5,64 s

Etant donné que les deux formes du taux d'accroissement avaient été données en classe, les élèves avaient le choix de la présentation pour arriver au débit instantané :

$= \frac{1}{3}\pi\left(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2\right) = D$

× limite quand t_2 tend vers t_1

$\lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{1}{3}\pi\left(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2\right) = \frac{1}{3}\pi \times 3t^2$

Donc $D = \frac{1}{3}\pi \times 3t^2$

On revient au problème posé :

combien vaut t pour que D soit inférieur à 100

$100 > \frac{1}{3}\pi \times 3t^2$

$\frac{300}{\pi} > 3t^2$

$\frac{300}{3\pi} > t^2$

$\frac{100}{\pi} > t^2$

$\sqrt{\frac{100}{\pi}} > t$

Donc t vaut doit etre inférieur à $\sqrt{\frac{100}{\pi}}$ donc environ inférieur à 5,64 minutes soit moins de 6 minutes *
pour que le débit soit encore inférieur à 100 cm^3/min.

Avec des formulations plus ou moins maladroites

$D = \left(t_2^2 + t_1 t_2 + t_1^2\right)\frac{1}{3}\pi$

Si t_2 tend vers t_1, $t_1 = t_2 = t$

Donc $D = \left(t^2 + t^2 + t^2\right)\frac{1}{3}\pi$

$= \frac{1}{3}\pi\left(3t^2 + 3th + h^2\right)$

$\lim\limits_{h \to 0} D_{[t, t+h]} = D(t) = \frac{1}{3}\pi\, 3t^2$

$= \pi t^2$

On cherche $\pi t^2 = 100$

$\iff t^2 = \frac{100}{\pi}$

$\iff t^2 \simeq 31,847$

$t = \sqrt{31,847}$

$= 5,64$ min

$= 5$ min et 38 secondes.

Remarque : peu d'élèves identifient les variables… Ils écrivent des expressions correctes du débit sans mettre en évidence les bornes de l'intervalle s'il s'agit d'un débit moyen ni le temps t s'il s'agit du débit instantané.

Plusieurs stratégies permettent d'arriver au débit instantané… le passage à la limite se fait soit en remplaçant h ou Δt par 0, soit en remplaçant t_1 ou t_2 par t…La forme indéterminée 0/0 n'apparait pas ici car les élèves ont pu facilement simplifier avant ! Il faut revenir avec eux sur le calcul initial pour attirer leur attention sur le chemin parcouru afin d'atteindre le résultat.

5. Débat sur la validité de ce calcul, sur le sens de l'indétermination 0/0.

Le problème décrit plus haut se prête à une expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm^2 à côté du vase conique et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm / min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm^3 /mn. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de 100 cm^3 / min. à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2, ce qui revient à égaler à 100 l'expression du débit dans laquelle on a annulé Δt.
Voir animation geogebra [cône et cylindre]

Tous les élèves ont terminé l'activité en un temps plus ou moins long et éventuellement aidés par certains camarades. La comparaison avec le remplissage du cylindre a permis de donner du sens au résultat !

Il n'y a pas eu d'évaluation notée de ce travail : la satisfaction d'arriver au résultat a été suffisante.